

Interrogation 3 - CORRECTION

Exercice 0.1. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$ (intégration par parties).

Les différentes fonctions étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, par intégration par parties avec $u = x, v' = \sin x$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx &= [uv]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'v \\ &= [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 0 - 0 + 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx$ (changement de variable $u = e^x$).

Posons le changement de variable $u = e^x$ avec $x = \ln u$ et $du = e^x dx$. La variable x varie de $x = 0$ à $x = 1$, donc la variable $u = e^x$ varie de $u = 1$ à $u = e$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}} &= \int_1^e \frac{du}{\sqrt{u+1}} \\ &= [2\sqrt{u+1}]_1^e \\ &= 2\sqrt{e+1} - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

3. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ (changement de variable $x = \tan t$).

Indication : $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$.

Posons le changement de variable $x = \tan t$, alors on a $dx = (1 + \tan^2 t) dt$, $t = \arctan x$ et on sait aussi que $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$.

Comme x varie de $x = 0$ à $x = 1$ alors t doit varier de $t = \arctan 0 = 0$

$$\text{à } t = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2 t)^2} (1+\tan^2 t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1+\tan^2 t} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(2t) + 1) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(2t) + t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Exercice 0.2. *Rappeler le théorème sur les intégrales impropres de Riemann.*

- $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si, et seulement si, $\alpha < 1$.
Dans ce cas $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha}$.
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.
Dans ce cas $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha-1}$.