

Programme de Khôlle 10

Semaine du 29 novembre 2021

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire (10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1. $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ | 4. $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^n}$ |
| 2. $\sum_{n \geq 0} n! z^n$ | 5. $\sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$ |
| 3. $\sum_{n \geq 0} \ln(n+1) z^n$ | 6. $\sum_{n \geq 2} \frac{z^n}{n(\ln n)^\alpha}$ |

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. Étudier et tracer la courbe définie par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) + 2 \cos(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$$

Si nécessaire, on étudiera l'allure de la courbe au voisinage du ou des points singuliers.

Exercice 2.2. On considère la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} + \ln(2+t) \\ y(t) = \frac{1}{t} + t \end{cases}, t \in]-2; 0[\cup]0; +\infty[$$

1. Montrer que cette courbe possède un unique point stationnaire et donner l'équation cartésienne de la tangente à la courbe en ce point.
2. Tracer la courbe.

Exercice 2.3. 1. Tracer la courbe Γ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = 2 \arctan(t) \\ y(t) = \ln \left(\frac{1+t^2}{1-t^2} \right) \end{cases} .$$

2. Calculer la longueur L de la courbe Γ entre les points de paramètres 0 et $\frac{1}{2}$.

Chap.7 : Fonctions vectorielles et courbes paramétrées

1 Introduction

2 Introduction aux fonctions vectorielles

2.1 Définition

2.2 Limite, continuité

2.3 Dérivabilité

2.3.1 Définition

2.3.2 Propriétés

2.3.3 Développements limités

3 Courbes définies par une représentation paramétrique

3.1 Représentation paramétrique

3.1.1 Vocabulaire

3.1.2 Réduction du domaine d'étude d'une courbe plane

3.2 Tangente en un point

3.2.1 Définitions et propriétés

3.2.2 Position locale d'une courbe plane par rapport à sa tangente

3.3 Exemples d'étude complète

4 Longueur d'un arc paramétré

Chap.8 : Séries entières

1 Convergence d'une série entière

1.1 Vocabulaire

1.2 Premiers exemples

1.3 Rayon de convergence

2 Méthodes de calcul du rayon de convergence

2.1 Utilisation du critère de D'Alembert

2.2 Quelques astuces