Chap.4 : Séries numériques

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités sur les séries

1.1 Définitions

Définition 1.1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. On appelle série de terme général u_n, et on note $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

*s'appelle la **somme partielle** d'indice n de la série $\sum u_n$*

Notation : Lorsque la suite u n'est pas définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais juste pour $n \geqslant n_0$, la série de terme général u_n se note $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et ses sommes partielles sont $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$ (et donc n'existent que pour $n \geqslant n_0$).

Exemple 1.2.
- *Pour la série $\sum n$, la somme partielle d'indice n est :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \tfrac{n(n+1)}{2}.$$

- *Pour la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$, la somme partielle d'indice n est : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On ne peut pas simplifier plus cette expression.*

Définition 1.3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe et $\sum u_n$ la série de terme général u_n.*
*Lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie quand $n \to +\infty$, on dit que la série $\sum u_n$ est **convergente**.*
*Cette limite s'appelle la **somme de la série** $\sum u_n$ et on la note $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.*

*Lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite infinie ou n'admet pas de limite, on dit que la série $\sum u_n$ est **divergente**.*

Remarque 1.4.
- *Pour la série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$, en cas de convergence, la somme se note $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.*

- *Lorsqu'on cherche à savoir si une série donnée est convergente ou divergente, on dit que l'on détermine la* ***nature*** *de la série.*
- *Attention à ne pas confondre la série* $\sum u_n$ *(qui est une suite) et la somme de la série* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *(qui est un nombre réel ou complexe).*

  Pour formuler les choses encore différemment :

$$\sum u_n = (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

Méthode 1.5. *Cette définition nous donne une première méthode pour répondre à la question "*$\sum u_n$ *est-elle convergente ?" ou "quelle est la nature de la série* $\sum u_n$*?" nous verrons tout au long de ce chapitre plusieurs méthodes pour répondre à ces questions).*

1. *Pour* $n \in \mathbb{N}$ *quelconque, on calcule* $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
2. *Ensuite on calcule* $\lim S_n$.
3. *Et enfin on conclut.*

Application 1.6. *Quelle est la nature de la série* $\sum(2n+1)$?

Application 1.7. *Montrer que la série* $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{2^n}$ *est convergente et calculer sa somme.*

Application 1.8. *La série* $\sum_{n\geqslant 0} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ *est-elle convergente ?*

Définition 1.9. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle ou complexe et* $\sum u_n$ *la série de terme général* u_n. *Lorsque la série* $\sum u_n$ *est convergente, on appelle* ***reste d'indice*** n *le réel ou complexe :*

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

1.2 Séries télescopiques

Proposition 1.10. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle ou complexe.*
La suite u *est convergente si, et seulement si, la série* $\sum (u_{n+1}-u_n)$ *est convergente.*
En cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1}-u_n) = \ell - u_0, \text{ où } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Preuve :

Application 1.11. *Étudier la nature de la série* $\sum \frac{1}{n^2+4n+3}$.

1.3 Propriétés

Pour toute la suite de ce chapitre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite réelle ou complexe et $\sum u_n$ la série de terme général u_n.

Proposition 1.12. *La nature d'une série ne dépend pas des premiers termes, autrement dit :*

$$\text{pour tout } n_0 \in \mathbb{N}, \sum_{n\geq n_0} u_n \text{ et } \sum u_n \text{ sont de même nature.}$$

Attention ! ! ! Les séries $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature mais n'ont pas la même somme en cas de convergence ! ! !

Théorème 1.13. *Si la série* $\sum u_n$ *converge alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Attention ! ! ! la réciproque à ce théorème est en général fausse ! ! ! ! !

Proposition 1.14. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ *alors la série* $\sum u_n$ *est divergente. On dit alors que la série* ***diverge grossièrement****.*

Méthode 1.15. *Cette propriété donne une méthode pour montrer qu'une série est divergente : il suffit de montrer que* $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$

Application 1.16. *Étudier la nature de la série* $\sum \mathrm{e}^n$*.*

ATTENTION !!! si $\lim u_n = 0$, on ne peut absolument RIEN dire sur la nature de la série !

Application 1.17. *Quelle est la nature de* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *?*

Remarque 1.18.
- *Dans cet exemple, il était impossible de calculer la somme partielle* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. *Pour trouver tout de même sa limite nous nous sommes servi d'une inégalité. Nous verrons plus tard encore d'autres méthodes pour déterminer la nature d'une série.*
- *La série* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *s'appelle la **série harmonique**.*

  Elle illustre un fait qui peut paraitre surprenant : on ajoute à chaque étape un terme de plus en plus petit et pourtant la somme continue à croitre jusqu'à $+\infty$. *Cette somme croit extrêmement lentement : même en ajoutant* 10^{43} *termes la somme ne dépasse toujours pas* $100\ldots$

Proposition 1.19. *Si la série* $\sum u_n$ *est convergente alors on a* $\lim R_n = 0$, *où* R_n *désigne le reste d'indice* n.

Preuve :

Proposition 1.20. *Soit pour tout* $n \in \mathbb{N}, u_n = a_n + \mathrm{i}b_n$ *qui définit une suite de nombres complexes, avec* a_n *et* $b_n \in \mathbb{R}$.

Alors la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont convergentes.
En cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Cela signifie que pour étudier une série à termes complexes on peut étudier séparément la série des parties réelles et la série des parties imaginaires.

Proposition 1.21. *Si la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la série $\sum_{n\geqslant n_0} (\lambda u_n)$ converge et on a :*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$$

Proposition 1.22. *Soient $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites réelles ou complexes.*

1. *Si les séries $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq n_0} v_n$ convergent, alors la série $\sum\limits_{n\geq n_0} (u_n + v_n)$ converge et on a :*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$$

2. *Si la série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ converge et la série $\sum\limits_{n\geq n_0} v_n$ diverge alors la série $\sum\limits_{n\geq n_0} (u_n + v_n)$ diverge.*
3. *Si les séries $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq n_0} v_n$ divergent, alors **on ne peut rien dire** sur la nature de la série $\sum\limits_{n\geq n_0} (u_n + v_n)$.*

Remarque 1.23.
- *En conséquence des deux propriétés précédentes, on peut dire que toute combinaison linéaire de séries convergentes est une série convergente et dans ce cas on a :*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$$

*On appelle cette propriété la **linéarité de la somme**.*
- *Il n'y a aucune règle simple avec le produit.*

Exemple 1.24. *On considère les suites u et v définies par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n \quad \text{et} \quad v_n = (-1)^{n+1}$$

Les suites u et v n'admettent pas de limites donc les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergente. On remarque alors que, pour tout entier $n, u_n + v_n = 0$. Donc la série $\sum (u_n + v_n)$ est convergente car ses sommes partielles sont nulles.
Mais $u_n + (-v_n) = 2(-1)^n$, cette quantité n'admet pas de limite lorsque $n \to +\infty$, donc la série $\sum (u_n + (-v_n))$ est divergente.
Cet exemple illustre le dernier point de la dernière propriété.

1.4 Convergence absolue

Définition 1.25. *Lorsque la série $\sum |u_n|$ est convergente, on dit que la série $\sum u_n$ **converge absolument** ou est absolument convergente.*

Théorème 1.26. *Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors la série $\sum u_n$ est convergente.*

Exemple 1.27. *Comme on a vu que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{2^n}$ est convergente, on peut affirmer que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{2^n}$ est absolument convergente et donc convergente.*

Remarque 1.28.
- *La réciproque de ce théorème est en générale fausse : si la série $\sum u_n$ converge on ne peut pas donner, sans calculs, la nature de la série $\sum |u_n|$.*
- *Les séries convergentes mais pas absolument convergentes s'appellent des **séries semi-convergentes**. Leur étude systématique est hors-programme, toutefois nous verrons en exercice comment en étudier certaines.*

Méthode 1.29. *Pour montrer que $\sum |u_n|$ est convergente, on peut montrer que $\sum u_n$ est convergente.*

Théorème 1.30. ***Inégalité triangulaire***
Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

2 Séries de référence

2.1 Série géométrique

Définition 2.1. *Soit $q \in \mathbb{K}$. La série $\sum q^n$ s'appelle la **série géométrique** de raison q.*

Théorème 2.2. ***Sommes partielles des séries géométriques***
Soient n et p deux entiers naturels tels que $p < n$, et soit $q \in \mathbb{K}$.

$$Si\ q = 1, \sum_{k=p}^{n} q^k = n - p + 1$$

termes Si $q \neq 1, \sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ = premier terme $\times \frac{1-q^{nombre\ de}}{1-q}$

Théorème 2.3. ***Convergence des séries géométriques***
La série $\sum q^n$ est convergente si, et seulement si, $|q| < 1$

Théorème 2.4. *Somme des séries géométriques Si $|q| < 1$ alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$:*

$$\sum_{n=p}^{+\infty} q^n = q^p \times \frac{1}{1-q} = \text{ premier terme } \times \frac{1}{1-q}$$

2.2 Séries de Riemann

Définition 2.5. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ s'appelle **une série de Riemann.***

Théorème 2.6. ***Convergence des séries de Riemann***
La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Remarque 2.7.

- *Nous avons vu une démonstration simple de ce théorème dans le chapitre " Intégration".*
- *On sait calculer la valeur de la somme $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (**fonction zêta de Riemann**) pour tout α entier pair supérieur ou égal à deux mais on ne sait pas calculer cette somme pour les autres valeurs de $\alpha \in \mathbb{C}$. C'est encore un problème ouvert en mathématiques (en particulier les mathématiciens s'intéressent beaucoup aux valeurs de α qui annulent la fonction ζ).*

Exemple 2.8.

- *La série $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente car c'est une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.*
- *La série $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente car c'est une série de Riemann avec $\alpha = \frac{1}{2} \leqslant 1$.*

3 Règles de convergence sur les séries à termes positifs

Nous allons dans cette partie, développer cinq méthodes supplémentaires pour déterminer la nature d'une série.

Ces cinq méthodes ne fonctionnent que pour les séries à termes positifs, c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$.
Si l'exercice propose une série dont les termes ne sont pas tous positifs, on pourra alors utiliser les méthodes présentées ci-dessous pour montrer que la série $\sum |u_n|$ est convergente.

3.1 Majoration des sommes partielles

Proposition 3.1. *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est croissante.*

Preuve :

Théorème 3.2. *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.*
La série $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est majorée.

Preuve :

Méthode 3.3. *Voici donc deux nouvelles méthodes pour étudier la nature d'une série à termes positifs :*

1. *S'il existe* $M \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}, S_n \leqslant M$ *alors la série* $\sum u_n$ *est convergente.*
2. *Si, pour tout* $n \geqslant n_0$*, on a* $S_n \geqslant w_n$ *avec* $\lim w_n = +\infty$ *alors la série* $\sum u_n$ *est divergente.*

Lorsque vous devez utiliser l'une de ces deux méthodes, le plus souvent l'énoncé vous guide.
Même si nous allons peut utiliser ces méthodes dans la feuille de TD, il faut bien retenir ce théorème car dans un problème il peut être utile !

3.2 Critère de comparaison

Théorème 3.4. ***Majoration de*** u_n ***par le terme général d'une série convergente***

Théorème 3.5. ***Minoration de*** u_n ***par le terme général d'une série divergente***
Si $\begin{cases} \forall n \geqslant n_0, 0 \leqslant v_n \leqslant u_n \\ \sum v_n \text{ est divergente} \end{cases}$ *alors* $\sum u_n$ *est divergente.*

Méthode 3.6. *On dispose de nouveau de deux nouvelles méthodes pour étudier la nature de la série à termes positifs* $\sum u_n$ *:*

- *Majorer* u_n *par le terme général d'une série convergente (alors* $\sum u_n$ *converge).*
- *Minorer* u_n *par le terme général d'une série divergente (alors* $\sum u_n$ *diverge).*

Lorsqu'on utilise une de ces deux méthodes on dit que l'on utilise les ***critères de comparaison sur les séries à termes positifs*** *.*

Application 3.7. *Montrer que la série* $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ *est divergente.*

Application 3.8. *Montrer que la série* $\sum \frac{\cos(n)}{n^2+1}$ *est convergente.*

Application 3.9. *Étudier la convergence de la série* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n+1}$.

Application 3.10. *Étudier la convergence de la série* $\sum \sin(n)\mathrm{e}^{-n}$.

Méthode 3.11. *Il n'est parfois pas évident de trouver une suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui nous permettent d'utiliser l'un des deux théorèmes ci-dessus.*
Voici une méthode qui permet très souvent de comparer la série $\sum u_n$ *à une série de Riemann.*
Cette méthode ne peut s'appliquer que si on sait (ou si on peut deviner) que l'on doit montrer que la série diverge ou converge.

- ***Pour montrer que*** $\sum u_n$ ***converge :***
  1. *On choisit "judicieusement" un réel* $\alpha > 1$ *tel que*
  $$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0.$$
  2. *On peut alors affirmer que pour* n *assez grand* $(n \geqslant n_0)$ *on a* $0 \leqslant n^\alpha u_n \leqslant 1$ *ce qui équivaut à* $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$
  3. *Comme* $\alpha > 1$ *la série* $\sum_{n\geqslant n_0} \frac{1}{n^\alpha}$ *est convergente et donc par critère de comparaison sur les séries à termes positifs, la série* $\sum u_n$ *est convergente.* $n \geqslant n_0$
  4. *En conclusion la série* $\sum u_n$ *est convergente.*
- ***Pour montrer que*** $\sum u_n$ ***diverge :***
  1. *On choisit "judicieusement" un réel* $\alpha \leqslant 1$ *et tel que*
  $$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty.$$
  2. *On peut alors affirmer que pour* n *assez grand* $(n \geqslant n_0)$ *on a* $n^\alpha u_n \geqslant 1$ *ce qui équivaut à* $u_n \geqslant \frac{1}{n^\alpha}$.
  3. *Comme* $\alpha \leqslant 1$ *la série* $\sum_{n\geqslant n_0} \frac{1}{n^\alpha}$ *est divergente et donc par critère de comparaison sur les séries à termes positifs, la série* $\sum u_n$ *est divergente.*
  4. *En conclusion la série* $\sum u_n$ *est divergente.*

Application 3.12. *Quelle est la nature de la série* $\sum \mathrm{e}^{-n^2}$ *?*

3.3 Critère des équivalents

Théorème 3.13. *Si* $\begin{cases} u_n \geqslant 0 \\ u_n \sim_{n\to+\infty} v_n \end{cases}$ *alors* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature.*

Méthode 3.14. *Encore une nouvelle méthode pour étudier la nature de la série à termes positifs* $\sum u_n$ *On cherche un équivalent simple de* u_n *en* $+\infty$ *(on le note* v_n*), et on conclut que* $\sum u_n$ *est de la même nature que* $\sum v_n$

Application 3.15. *Déterminer la nature de la série* $\sum\limits_{n\geq 1}\left(\frac{\mathrm{e}^{1/n}-1}{\sqrt{n}}\right)$.

Application 3.16. *Étudier la convergence de la série* $\sum \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

3.4 Règle de D'Alembert

Théorème 3.17. ***Règle de D'Alembert***

- *Si* $\begin{cases} u_n > 0 \\ \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \end{cases}$ *alors* $\sum u_n$ *est convergente.*
- *Si* $\begin{cases} u_n > 0 \\ \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \text{ ou } \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty \end{cases}$ *alors* $\sum u_n$ *est grossièrement divergente.*

Remarque 3.18. *Si* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ *il faut trouver une autre méthode pour déterminer la nature de* $\sum u_n$.

Méthode 3.19. *Ce théorème donne la dernière méthode de ce cours pour étudier la nature d'une série à termes strictement positifs :*

1. *On calcule* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$
2. *si on trouve un résultat strictement inférieur à* 1 *la série est convergente*

3. *si on trouve un résultat strictement supérieur à 1 ou $+\infty$ la série est grossièrement divergente.*

Application 3.20. *Étudier la convergence de la série* $\sum \frac{1}{n!}$.

Application 3.21. *Déterminer la nature de la série* $\sum \frac{(n+1)^3}{n!}$.

3.5 Une comparaison série-intégrale

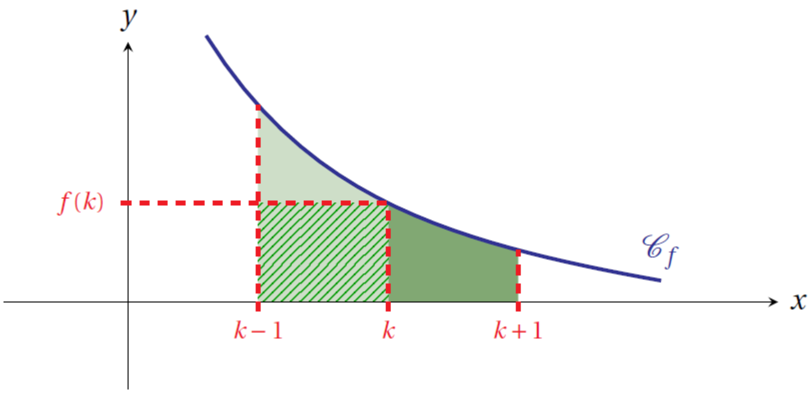
Cette technique a déjà été abordée dans le chapitre "Intégration". Pour rappel :

Théorème 3.22. ***Théorème de comparaison séries-intégrales***
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.
Si $f : [n_0; +\infty[\to \mathbb{R}$ *est une fonction :*

- *continue sur* $[n_0; +\infty[$ *;*
- *positive ;*
- *décroissante sur* $[n_0; +\infty[$

Alors la série $\sum\limits_{n \geq n_0} f(n)$ *et l'intégrale* $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ *sont de même nature.*

Méthode 3.23. ***Encadrer une somme (cas d'une fonction décroissante)***
Si $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue, positive et décroissante, on peut étudier la suite des sommes partielles ou la suite des restes de la série $\sum f(n)$ en les encadrant avec des intégrales.
On peut représenter la situation avec le graphique suivant :



Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la partie hachurée a pour aire $f(k)$, donc on en déduit l'inégalité :

$$\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t$$

En sommant ces inégalités pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on obtient en utilisant la relation de Chasles un encadrement de la suite des sommes partielles par des intégrales :

$$\int_1^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_0^{n} f(t)\mathrm{d}t$$

Si la série $\sum f(n)$ est convergente, on peut de même encadrer le reste :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

On adaptera facilement cette méthode dans le cas où f est une fonction croissante.

Application 3.24. *Déterminer un équivalent de la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

4 Développement décimal d'un nombre réel

Théorème 4.1. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers vérifiant :*

1. $a_0 \in \mathbb{Z}$ *et* $a_n \in [\![0,9]\!]$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$
2. *La suite* (a_n) *n'est pas stationnaire en 9*
3. *On a* $x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n 10^{-n}$.

Définition 4.2. ***Développement décimal d'un nombre réel***
*La suite $(a_n)_{n\in N}$ s'appelle le **développement décimal** du réel x.*

Remarque 4.3.
- *Le réel a_0 est la partie entière de x et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. est la suite de ses décimales.*
- *La condition (ii) assure l'unicité du développement. En effet, on a la relation*

$$0,999\ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} 9\cdot 10^{-n} = \frac{9\cdot 10^{-1}}{1-10^{-1}} = 1,000\ldots$$

Théorème 4.4. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Le nombre x est rationnel si et seulement si son développement décimal $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.*

Exemple 4.5. *On a* $\frac{139}{108} = 1,28703703703\ldots$