Devoir Surveillé 5

Durée : 3 heures
Calculatrice interdite

Exercice 0.1. *Soit f l'application :*

$$f :\left| \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto (-2x+y, x-2y) \end{array}\right.$$

et on notera I l'application identité de $\mathbb{R}^2$.

1. *Démontrer que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.*
2. *Donner l'expression de $f^2(x,y)$ en fonction de x et y pour un couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*
3. *Montrer que $g = f^2 + 4f + 3I$ est l'endomorphisme nul.*
4. *En déduire l'existence d'un endomorphisme h tel que $f \circ h = h \circ f = I$. Qu'en conclure pour f ?*
5. *Justifier que g peut s'écrire $g = (f+I) \circ (f+3I)$ et que :*
$$g = (f+3I) \circ (f+I).$$
6. *Donner l'expression des endomorphismes $f_1 = f + I$ et $f_2 = f + 3I$ en fonction de x et y pour un couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*
7. *Déterminer le noyau de f_1 et f_2.*
8. *On désigne par $F = Ker\ (f+I)$ et $G = Ker\ (f+3I)$*
   (a) *Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.*
   (b) *Déterminer la projection p sur F parallèlement à G. On demande de calculer explicitement $p(x,y)$.*
   (c) *En déduire l'expression de $q(x,y)$ où q est la projection sur G parallèlement à F.*
   (d) *Vérifier que $p + q = I$ et $p + 3q = -f$.*
   (e) *Retrouver le résultat de la question (4.).*

Exercice 0.2. *Dans tout ce problème, on désignera par f la fonction :*

$$f : \left\{ \begin{array}{l}]-1;0[\cup]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{ln(1+x)}{x} \end{array}\right.$$

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

On désigne par k la fonction $k : \left\{ \begin{array}{l}]-1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x - (1+x)ln(1+x) \end{array} \right.$.

1. *Calculer $k'(x)$ pour tout $x \in]-1;+\infty[$.*
2. *Étudier le signe de $k'(x)$ pour tout $x \in]-1;+\infty[$, puis construire le tableau de variation de k sur $]-1;+\infty[$.*
3. *En déduire le signe de $k(x)$ sur $]-1;+\infty[$. Justifier votre réponse.*

Partie B - Étude de la fonction f

1. *Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.*
2. *Étude de f au voisinage de 0.*
   (a) *Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.*
   (b) *Justifier alors que f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction $\tilde{f}$ et on précisera la valeur de $\tilde{f}(0)$. On notera $\mathscr{D}_{\tilde{f}}$ le domaine de définition de $\tilde{f}$.*
   (c) *La fonction $\tilde{f}$ est-elle dérivable en 0 ? Si oui, préciser $\tilde{f}'(0)$.*
   $\tilde{f}'$ est-elle continue en 0 ?
3. *Variations de $\tilde{f}$ sur $\mathscr{D}_{\tilde{f}}$.*
   (a) *Démontrer que pour tout $x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{k(x)}{x^2(1+x)}$.*
   (b) *Construire le tableau de variation de $\tilde{f}$ sur $\mathscr{D}_{\tilde{f}}$.*