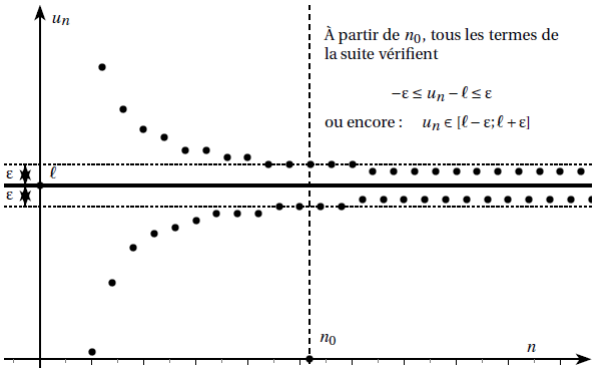
Chap.28 : Limite d'une suite réelle

1 Limite d'une suite

Définition 1.1. *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite (u_n) admet pour* ***limite*** *ℓ lorsque pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont à distance de ℓ inférieure ou égale à ϵ :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \mid u_n - \ell \mid \leq \epsilon$$



Lorsqu'un tel réel ℓ existe, on dit que la suite (u_n) est ***convergente*** *ou qu'elle admet une* ***limite finie****.*
dans le cas contraire, on dit qu'elle est ***divergente****.*
Dans le cas où cette limite existe, on admet quelle est ***unique*** *et on notera :*

$$\lim u_n = \ell \text{ ou } u_n \to \ell$$

Remarque 1.2. $\mid u_n - \ell \mid \leq \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon \leq u_n - \ell \leq \epsilon \Leftrightarrow \epsilon \Leftrightarrow \ell - \epsilon \leq u_n \leq \ell + \epsilon$

La suite (u_n) converge vers le réel ℓ si, pour un réel ϵ positif, arbitrairement petit, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont compris entre $\ell - \epsilon$ et $\ell + \epsilon$.

Exemple 1.3. *Utilisons la définition précédente pour démontrer que la suite de terme général $1 + \frac{1}{n^2}$ converge vers 1.*
Soit $\epsilon > 0$, on cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$\mid u_n - 1 \mid = \frac{1}{n^2} \leq \epsilon$$

Il suffit donc de choisir n_0 tel que $n_0 \geq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$. En effet, pour $n \geq n_0$:

$$\mid u_n - 1 \mid = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n_0^2} \leq \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}})^2} \leq \epsilon$$

Donc (u_n) converge bien vers 1.

Définition 1.4. *On dit que la suite (u_n) admet la limite $+\infty$, ou qu'elle diverge vers $+\infty$, lorsque, pour tout réel $A > 0$, il existe un entier naturel n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs ou égaux à A :*

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A$$

On note alors :

$$\lim u_n = +\infty \text{ ou } u_n \to +\infty$$

De la même manière, on dit que (u_n) admet la limite $-\infty$, ou qu'elle diverge vers $-\infty$, lorsque :

$$\forall B < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq B$$

Exemple 1.5. *Utilisons la définition précédente pour montrer que la suite (u_n) de terme général $u_n = \sqrt{n}$ diverge vers $+\infty$.*
Soit $A > 0$. On cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a : $u_n = \sqrt{n} \geq A$.
Il suffit de choisir n_0 tel que $n_0 \geq A^2$.
En effet, pour tout $n \geq n_0$, on a alors :

$$u_n = \sqrt{n} \geq \sqrt{n_0} \geq \sqrt{A^2} = A$$

Proposition 1.6. *Soit (u_n) un suite réelle, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\lim u_n = \ell$
2. $\lim u_n - \ell = 0$
3. $\lim \mid u_n - \ell \mid = 0$

Proposition 1.7. *Si la suite réelle (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors toute suite extraite $(u_{\sigma(n)})$ de cette suite converge également vers ℓ.*

Remarque 1.8. *La contraposée de cette propriété est très utile pour démontrer qu'une suite est divergente :*

- *Si une suite extraite $(u_{\sigma(n)})$ ne converge pas vers un réel ℓ alors (u_n) ne converge pas vers ℓ.*
- *S'il existe deux suites extraites $(u_{\sigma_1(n)})$ et $(u_{\sigma_2(n)})$ qui convergent vers deux limites distinctes alors (u_n) diverge.*

Application 1.9. *Démontrer que les suites dont les termes généraux sont donnés ci-dessous divergent :*

1. $u_n = 2 + (-1)^n$
2. $u_n = cos(\frac{n\pi}{2})$

Proposition 1.10. *Toute suite réelle convergente est bornée.*

Preuve :

2 Opérations sur les limites de suites

Théorème 2.1. *Les règles opératoires sur les limites de fonctions se transposent aux limites de suites. Soient (u_n) et (u_n) deux suites, ℓ_1 et ℓ_2 deux réels, on note F.I. pour "forme indéterminée" :*

- *Limite de la suite somme :*

$\lim u_n$	ℓ_1	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	ℓ_2	ℓ_2	ℓ_2	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim u_n + v_n$	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*F.I.*

- *Limite de la suite produit :*

$\lim u_n$	ℓ_1	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim v_n$	ℓ_2	$\ell_2 \neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim u_n \times v_n$	$\ell_1 \times \ell_2$	$\pm\infty$ *(règle des signes)*	*F.I.*	$\pm\infty$ *(règle des signes)*

- *Limite de la suite quotient :*

$\lim u_n$	ℓ_1	$\pm\infty$	ℓ_1	$\pm\infty$	$\ell_1 \neq 0$	0
$\lim v_n$	$\ell_2 \neq 0$	$\ell_2 \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0^+ *ou* 0^-	0
$\lim \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\pm\infty$ *(règle des signes)*	0	*F.I.*	$\pm\infty$ *(règle des signes*	*F.I.*

Théorème 2.2. *Passage à la limite dans une inégalité.*
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $\lim u_n = \ell$ *avec* $\ell \in \mathbb{R}$ *alors :*

- *si pour tout* $n \geq n_0, u_n \geq m$ *alors* $\ell \geq m$ *;*
- *si pour tout* $n \geq n_0, u_n \leq M$ *alors* $\ell \leq M$ *;*
- *si pour tout* $n \geq n_0, u_n \leq v_n$ *et si* $\lim v_n = \ell'$ *alors* $\ell \leq \ell'$.

Théorème 2.3. *Croissances comparées.*
Soient $a > 0, b > 0$ *et* $c > 0$ *alors :*

$$\lim \frac{(ln(n))^b}{n^a} = 0 \text{ et } \lim \frac{e^{cn}}{n^a} = +\infty)$$

Proposition 2.4. *Suites arithmétiques et géométriques.*

- *Une suite* ***arithmétique*** *est :*
  - *convergente si et seulement si sa raison est nulle (elle est alors constante) ;*
  - *divergente vers* $+\infty$ *si et seulement si sa raison est strictement positive ;*
  - *divergente vers* $-\infty$ *si et seulement si sa raison est strictement négative.*

  .
- *On considère la suite géométrique* (q^n) *de raison* $q \in \mathbb{R}$ *:*

$$\lim q^n = \begin{cases} 0 \text{ si } \mid q \mid < 1 \\ +\infty \text{ si } q > 1 \\ 1 \textbf{ si } q = 1 \\ \text{pas de limite si } q \leq -1 \end{cases}$$

Application 2.5. *Quelles sont les limites des suites* (u_n) *dont les termes généraux sont :*

1. $u_n = -3(\frac{-1}{2})^n$
2. $u_n = \frac{ln(n)}{3n^2}$
3. $u_n = 4(\frac{-7}{3})^n$
4. $u_n = -2(\frac{6}{5})^n$
5. $u_n = \frac{e^{3n}}{2n^3}$
6. $u_n = \frac{n^3-3n}{2+n^3}$

3 Théorèmes d'existence d'une limite

3.1 Encadrement et limite

Théorème 3.1. *On considère trois suites réelles $(u_n), (v_n)$ et (w_n) telles qu'à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$:*

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

- *Si (u_n) et (w_n) sont convergentes de même limite ℓ alors il en est de même pour (v_n) :*

$$\lim u_n = \lim w_n = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim v_n = \ell$$

- *Si (u_n) est divergente vers $+\infty$ alors il en est de même pour (v_n) :*

$$\lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim v_n = +\infty$$

- *Si (w_n) est divergente vers $-\infty$ alors il en est de même pour (v_n) :*

$$\lim w_n = -\infty \Rightarrow \lim v_n = -\infty$$

Application 3.2. *Déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) dont le terme général est donné ci-dessous :*

1. $u_n = e^{-3n}cos(n)$
2. $u_n = \sqrt{n} + (-1)^n$
3. $u_n = \frac{3sin(n}{1+n^2}$

3.2 Théorème de la limite monotone

Le théorème qui suit va assurer la convergence d'une suite, sans pour autant fournir la valeur de la limite.

Théorème 3.3. *Théorème de la limite monotone.*

- *Soit (u_n) une suite croissante :*
  - *Si (u_n) est majorée alors elle est convergente vers un réel ℓ :*

$$\lim u_n = \ell = \sup \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$$

  - *Si (u_n) n'est pas majorée alors elle diverge vers $+\infty$:*

$$\lim u_n = +\infty$$

- *Soit (u_n) une suite décroissante :*
  - *Si (u_n) est minorée alors elle est convergente vers un réel ℓ :*

$$\lim u_n = \ell = \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$$

  - *Si (u_n) n'est pas minorée alors elle diverge vers $-\infty$:*

$$\lim u_n = -\infty$$

Remarque 3.4. *On retiendra donc que dans $\mathbb{R}$:*

- *Toute suite croissante majorée converge.*
- *Toute suite décroissante minorée converge.*

Application 3.5. *On pose $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.*

1. *Démontrer que pour tout $n \geq 1, 2^{n-1} \leq n!$.*
2. *En déduire un majorant de la suite (u_n).*
3. *Démontrer que la suite (u_n) est convergente.*

Application 3.6. *Soit la suite (u_n) de terme général $u_n = 1 - \frac{n}{n+1}$.*

1. *Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.*
2. *(u_n) est-elle convergente ?*

3.3 Suites adjacentes

Proposition 3.7. *Segments emboîtés.*
Soient deux suites (u_n) *et* (v_n) *vérifiant :*

1. (u_n) *est croissante et* (v_n) *est décroissante*
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$

Alors (u_n) *et* (v_n) *convergent et :*

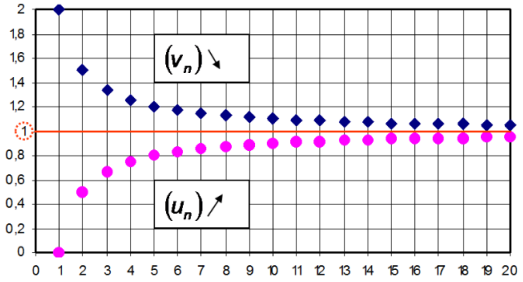
$$\lim u_n \leq \lim v_n$$

Preuve :

Définition 3.8. *On appelle* ***suites adjacentes*** *deux suites* (u_n) *et* (v_n) *vérifiant :*

1. (u_n) *est croissante et* (v_n) *est décroissante*
2. $\lim(v_n - u_n) = 0$

Exemple 3.9. *Les suites de termes généraux* $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ *et* $v_n = 1 + \frac{1}{n}$ *sont adjacentes.*



Application 3.10. *Les suites* (u_n) *et* (v_n) *dont les termes généraux sont* $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ *et* $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ *sont-elles adjacentes ?*

Théorème 3.11. *Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite finie commune $\ell \in \mathbb{R}$. De plus :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_n$$

Application 3.12. *Montrer la convergence des suites (u_n) et (v_n) dont les termes généraux sont :*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}$$

Application 3.13. *(u_n) et (v_n) sont définies par :*

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{4} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3v_n+1}{4} \end{cases}$$

1. *Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1 \leq v_n$*
2. *La suite (w_n) de terme général $w_n = v_n - u_n$ est géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $w_0 = 2$.*
3. *Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.*

Rappelons la propriété suivante (Cf. Ensemble des nombres réels) :

Proposition 3.14. *Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :*

- $a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ *est une valeur approchée de x à 10^{-n} près par défaut.*
- $b_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ *est une valeur approchée de x à 10^{-n} près par excès.*

Les suites (a_n) et (b_n) sont en fait adjacentes, de limite x .

Remarque 3.15. *Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La **méthode de dichotomie**, étudiée en informatique permet d'approcher la solution de l'équation $f(x) = 0$ avec p bits significatifs en p étapes, ce qui est très efficace.*
Ses conditions d'utilisation sont assez simples : on demande seulement à la fonction f d'être continue et de changer de signe.
Cette méthode est basée sur la construction de deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) dont la limite est la solution α de l'équation $f(x) = 0$.
Par exemple, pour approximer la solution de $f(x) = 0$ si $f(x) = x^5+3x^3-1$:

a_n	b_n	$\frac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(\frac{a+b}{2})$	$f(b)$
0	1	0,5	-1	$\approx -0,59$	3
0,5	1	0,75	$\approx -0,59$	$\approx 0,5$	3
0,5	0,75	0,625	$\approx -0,59$	$\approx -0,17$	$\approx 0,5$
0,625	0,75	0,6875	$\approx -0,17$	$\approx 0,13$	$\approx 0,5$
0,625	0,6875	0,65625	$\approx -0,17$	$\approx -0,03$	$\approx 0,13$