Concours blanc - CORRECTION

Durée : 4 heures
Calculatrice interdite

Exercice 0.1. *On considère l'équation différentielle :*

$$(E) : (1-x^2)y' - xy = x.$$

1. *Préciser les intervalles sur lesquels l'équation (E) peut être résolue.*
   Pour résoudre (E), il faut que $1-x^2 \neq 0$. On peut donc résoudre sur l'un des trois intervalles :

$$I_1 =]-\infty; -1[\,, I_2 =]-1; 1[\text{ et } I_3 =]1; +\infty[.$$

2. *Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à l'équation (E).*
   Il s'agit de résoudre (H) : $y' - \frac{x}{1-x^2}y = 0$ sur l'un des intervalles I obtenu précédemment.
   Soit $a(x) = -\frac{x}{1-x^2}$, une primitive est :

$$A(x) = \frac{1}{2}ln(|\ 1-x^2\ |) = ln(\sqrt{|\ 1-x^2\ |})$$

   D'où :

$$\mathscr{S}_H = \left\{x \mapsto Ce^{-A(x)}, C \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \mapsto \frac{C}{\sqrt{|1-x^2|}}, C \in \mathbb{R}\right\}$$

3. *Donner les solutions de l'équation différentielle sur chacun des trois intervalles obtenus à la Q.1. (On pourra chercher une solution particulière égale à une fonction affine $f(x) = ax + b$).*
   $y(x) = ax + b$ est solution particulière de (E) sur l'intervalle I si et seulement si :

   $\forall x \in I, (1-x^2)y' - xy = x \Leftrightarrow \forall x \in I, (1-x^2)a - x(ax+b) = x$
   $\forall x \in I, -2ax^2 + (a-b)x = x \Leftrightarrow a = 0 \text{ et } b = -1$

   La fonction constante $y = -1$ est donc une solution particulière de (E) sur I. D'où l'ensemble des solutions de (E) :

   - *sur $I_1 =]-\infty; -1[\,, \mathscr{S}_1 = \left\{x \mapsto \frac{C}{\sqrt{x^2-1}} - 1, C \in \mathbb{R}\right\}$*
   - *sur $I_2 =]-1; 1[\,, \mathscr{S}_2 = \left\{x \mapsto \frac{C}{\sqrt{1-x^2}} - 1, C \in \mathbb{R}\right\}$*
   - *sur $]1; +\infty[\,, \mathscr{S}_3 = \left\{x \mapsto \frac{C}{\sqrt{x^2-1}} - 1, C \in \mathbb{R}\right\}$*

4. *Déterminer l'unique solution f de (E) sur $]-1;1[$ vérifiant $f(0)=0$.*
Soit $f \in \mathscr{S}_2$, alors $f(0)=0 \Leftrightarrow \frac{C}{\sqrt{1-0^2}}-1 \Leftrightarrow C=1$.
L'unique solution f de (E) sur $]-1;1[$ vérifiant $f(0)=0$ est donc :

$$f : x \mapsto \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}-1.$$

5. *Soit la fonction f définie sur $]-1;1[$ par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1$ dont on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative dans un repère orthonormé.*
   (a) *Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.*
   Une primitive de f est $x \mapsto Arcsin(x)-x$ donc :
   $$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = [Arcsin(x)-x]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}$$
   (b) *Donner un développement limité à l'ordre 3 de f en 0.*
   On utilise le $DL_3(0)$ de $(1+x)^\alpha$ pour $\alpha=\frac{-1}{2}$. On obtient :
   $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3)$$
   D'où, en composant par $x \mapsto -x^2$:
   $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1+\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^3)$$
   Enfin : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1=\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^3)$
   (c) *En déduire l'équation de la tangente T_0 à la courbe de f au point d'abscisse 0. D'après le DL obtenu précédemment, $T_0 : y=0$, il s'agit de l'axe des abscisses.*
   (d) *Quelles sont les positions relatives de T_0 et de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0 ?*
   $\frac{1}{2}x^2>0$ donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de T_0 au voisinage de 0.
   (e) *Quelle est la parité de f ? $\mathscr{D}_f=]-1;1[$ est symétrique par rapport à 0. Soit $x \in \mathscr{D}_f$:*
   $$f(-x)=\frac{1}{\sqrt{1-(-x)^2}}-1=f(x)$$
   donc f est paire.
   (f) *Étudier les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.*
   $$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = +\infty$$
   (g) *Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.*
   f est dérivable sur $]-1;1[$ comme composée de fonctions dérivables et :
   $$f'(x)=\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2}=\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

f est donc décroissante sur $]-1;0]$ et croissante sur $]0;1[$.

Exercice 0.2. *On pose :*

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que $\mathscr{B} = \{E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}\}$ est la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
On note ϕ l'application qui, à toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, associe la matrice

$$\phi(M) = AM - MA$$

.

1. *Démontrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.*
   Soient $(M, M') \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

   $$\phi(\lambda M + M') = A(\lambda M + M') - (\lambda M + M')A$$
   $$= \lambda AM + AM' - \lambda MA - M'A = \lambda(AM - MA) + AM' - M'A$$
   $$= \lambda\phi(M) + \phi(M')$$

   Donc ϕ est linéaire, de plus $Im(\phi) \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donc ϕ est bien un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. *Déterminer $Ker(\phi)$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ alors :*

   $$M \in Ker(\phi) \Leftrightarrow AM = MA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c = a+b \\ b+d = a+b \\ a+c = c+d \\ b+d = c+d \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} c = b \\ a = d \end{cases} \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} d & c \\ c & d \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Ainsi $Ker(\phi) = Vect(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\})$

3. *Déterminer la matrice B de ϕ dans la base $\mathscr{B}$.*
   Pour cela, il faut calculer les images des vecteurs de la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On obtient :

- $\phi(E_{1,1}) = E_{2,1} - E_{1,2}$
- $\phi(E_{1,2}) = -E_{1,1} + E_{2,2}$
- $\phi(E_{2,1}) = E_{1,1} - E_{2,2}$
- $\phi(E_{2,2}) = -E_{1,2} + E_{2,1}$

D'où la matrice de ϕ dans la base $\mathscr{B}$: $Mat_{\mathscr{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. *Déterminer $Im(\phi)$.*
   $Im(\phi) = Vect(\{\phi(E_{1,1}), \phi(E_{1,2}), \phi(E_{2,1}), \phi(E_{2,2})\})$.
   Or $\phi(E_{1,1}) = -\phi(E_{2,2})$ *et* $\phi(E_{1,2}) = -\phi(E_{2,1})$ *donc :*
   $$Im(\phi) = Vect(\{\phi(E_{1,1}), \phi(E_{2,1}))\}) = Vect(\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\})$$

5. (a) *Démontrer que $Ker(\phi)$ et $Im(\phi)$ sont en somme directe.*
   $Ker(\phi)$ *et* $Im(\phi)$ *sont en somme directe si et seulement si*
   $$Ker(\phi) \cap Im(\phi) = \left\{\overrightarrow{0}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right\}$$
   Soit $M \in Ker(\phi) \cap Im(\phi)$ *:*
   - $M \in Ker(\phi)$ *donc :*
     $\exists(\lambda_{1,2}) \in \mathbb{R}^2, M = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}$
   - $M \in Im(\phi)$ *donc :* $\exists(\lambda_{3,4}) \in \mathbb{R}^2$ *:*
     $M = \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_4 & -\lambda_3 \\ \lambda_3 & -\lambda_4 \end{pmatrix}$

   Par identification des coefficients, on obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ *donc* $Ker(\phi) \cap Im(\phi) = \left\{\overrightarrow{0}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right\}$ *et la somme est bien directe.*

   (b) *Vérifier que $I \in Ker(\phi)$.*
   $AI = IA$ *donc* $\phi(I) = AI - IA = \overrightarrow{0}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ *et* $I \in Ker(\phi)$.

   (c) *Établir qu'alors qu'il n'existe aucune matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\phi(M) = I$.*
   S'il existait une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *telle que* $\phi(M) = I$ *alors* $I \in Im(\phi)$. *Or, d'après la question précédente,* $I \in Ker(\phi)$. *On aurait alors* $I \in Ker(\phi) \cap Im(\phi)$ *donc* $I = \overrightarrow{0}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$. *Ce qui est faux.*

6. *On considère les matrices* $K_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ *et*
   $K_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) *Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = \{A, K_1, K_2, K_3\}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.*
$card(\mathscr{B}') = 4 = dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ donc $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\lambda_1 A + \lambda_2 K_1 + \lambda_3 K_2 + \lambda_3 K_3 = \overrightarrow{0}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}.$$

Après résolution, on obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ donc $\mathscr{B}'$ est une famille libre, c'est donc une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) *Écrire la matrice D de ϕ dans la base $\mathscr{B}'$.*
Il faut calculer les images par ϕ de chacune des matrices de $\mathscr{B}'$. On obtient :

- $\phi(A) = \overrightarrow{0}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$
- $\phi(K_1) = \overrightarrow{0}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$
- $\phi(K_2) = -2K_2$
- $\phi(K_3) = 2K_3$

D'où : $Mat_{\mathscr{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Exercice 0.3. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs réelles telle que pour tout $x \geq 0$:*

$$f(x) = \tfrac{2x+1}{x+2}$$

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. (a) *Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer f'.*
f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$f'(x) = \tfrac{2(x+2)-(2x+1)}{(x+2)^2} = \tfrac{3}{(x+2)^2}$$

(b) *Dresser le tableau de variation de f. Placer les réels 1 et $f(1)$ dans ce tableau.*
$f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^+$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus, $f(0) = \frac{1}{2}, f(1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}} = 2$.

2. (a) *Démontrer que pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n \in [0; 1]$.*
Soit la propriété $\mathscr{P}_n$: " u_n existe et $0 \leq u_n \leq 1$ ".
$\mathscr{P}_0$ est vraie car u_0 existe et $u_0 = \frac{1}{2} \in [0; 1]$.
Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$. Alors u_n existe et $u_n \in [0; 1]$ or f est définie sur $[0; 1]$ donc $u_{n+1} = f(u_n)$ existe.

Par ailleurs, f est strictement croissante sur $[0;1]$ donc : $0 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$ *donc* $0 < \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$.
Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
$\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire donc, par principe de récurrence, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) *Établir l'inégalité suivante :*

$$\forall x \in [0;1], \mid f'(x) \mid \leq \frac{3}{4}$$

On sait que $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$. *Or :* $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq x+2 \leq 3$. *D'où* $4 \leq (x+2)^2 \leq 9$ *et* $\frac{1}{9} \leq \frac{1}{(x+2)^2} \leq \frac{1}{4}$. *Ainsi :* $f'(x) \leq \frac{3}{4}$.

(c) *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :*

$$\mid u_{n+1} - 1 \mid \leq \frac{3}{4} \mid u_n - 1 \mid$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que la fonction f est continue sur $[u_n;1]$, dérivable sur $]u_n;1[$ et vérifie :

$$\forall x \in [0;1], \mid f'(x) \mid \leq \frac{3}{4}$$

Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\mid f(u_n) - f(1) \mid \leq \frac{3}{4} \mid u_n - 1 \mid$$

Or $f(1) = 1$ et $f(u_n) = u_{n+1}$ donc :

$$\mid u_{n+1} - 1 \mid \leq \frac{3}{4} \mid u_n - 1 \mid$$

(d) *Établir l'inégalité suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$\mid u_n - 1 \mid \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Soit la propriété $\mathscr{P}_n$: " $\mid u_n - 1 \mid \leq \frac{1}{2} \times (\frac{3}{4})^n$" pour $n \in \mathbb{N}$.
$\mid u_0 - 1 \mid = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times (\frac{3}{4})^0$ *donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.*
Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$\mid u_{n+1} - 1 \mid \leq \frac{3}{4} \mid u_n - 1 \mid \leq \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
$\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire donc, par principe de récurrence, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(e) *En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.*
$0 < \frac{3}{4} < 1$ *donc* $\lim \frac{1}{2} \times (\frac{3}{4})^n = \frac{1}{2} \times 0 = 0$. *Par encadrement, on a donc* $\lim \mid u_n - 1 \mid = 0$ *et (u_n) est convergente, de limite 1.*

3. *Soient A, J et I les matrices carrées d'ordre 2 suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) *Démontrer que $J^2 = 2J$ et en déduire J^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*
On obtient $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+1 \end{pmatrix} = 2J$.
On montre alors par récurrence que $J^n = 2^{n-1}J$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) *Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'égalité suivante :*

$$A^n = I + \frac{1}{2}(3^n - 1)J$$

On sait que $A = I+J$ et on vérifie aisément que I et J commutent ($IJ = JI = J$). On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :

$$A^n = (J+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k I^{n-k} = I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} J^k$$

$$= I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} J = I + (\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1}) J$$

$$= I + \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k}) J = I + \frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} - \binom{n}{0} 2^0) J$$

$$= I + \frac{1}{2}(3^n - 1)J$$

(c) *Donner sous forme matricielle l'expression de A^n en fonction de n.*
$A^n = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}(3^n - 1) & \frac{1}{2}(3^n - 1) \\ \frac{1}{2}(3^n - 1) & 1 + \frac{1}{2}(3^n - 1) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}$

4. *On note (p_n) et (q_n) les suites définies par :*

$$p_0 = 1, q_0 = 2 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} p_{n+1} = 2p_n + q_n \\ q_{n+1} = p_n + 2q_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

(a) *Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.*
Remarquons tout d'abord que $X_{n+1} = AX_n$.
Soit la propriété $\mathscr{P}_n$: "$X_n = A^n X_0$".
Nous savons que $A^0 = I$ donc on a bien $X_0 = A^0 X_0$ et $\mathscr{P}_0$ est vraie.
Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$ alors :$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0$ donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
$\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire donc, par principe de récurrence, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) *En déduire l'expression de X_n en fonction de n et donner les expressions de p_n et q_n en fonction de n.*

$X_n = A^n X_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1+2\times 3^n-2 \\ 3^n-1+2\times 3^n+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1+2\times 3^n-2 \\ 3^n-1+2\times 3^n+2 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^{n+1}-1 \\ 3^{n+1}+1 \end{pmatrix}$

D'où $p_n = \frac{1}{2}(3^{n+1}-1)$ *et* $q_n = \frac{1}{2}(3^{n+1}+1)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

5. (a) *A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir que pour tout entier* $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{p_n}{q_n}$.

   Soit la propriété $\mathscr{P}_n$: "$u_n = \frac{p_n}{q_n}$".

   $\frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{2} = u_0$ *donc* $\mathscr{P}_0$ *est vraie.*

   Supposons $\mathscr{P}_n$ *vraie à un certain rang* $n \in \mathbb{N}$.

   $u_{n+1} = f(u_n) = f(\frac{p_n}{q_n}) = \frac{2\times\frac{p_n}{q_n}+1}{\frac{p_n}{q_n}+1} = \frac{2p_n+q_n}{p_n+2q_n} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$.

   Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ *est vraie.*

   $\mathscr{P}_0$ *est vraie et* $\mathscr{P}_n$ *est héréditaire donc, par principe de récurrence,* $\mathscr{P}_n$ *est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

   (b) *Donner l'expression de* u_n *en fonction de* n *puis retrouver la limite de la suite* (u_n).

   , $u_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)}{\frac{1}{2}(3^{n+1}+1)} = \frac{3^{n+1}-1}{3^{n+1}+1}$ *Or* $3^{n+1}-1 \sim 3^{n+1}$ *et* $3^{n+1}+1 \sim 3^{n+1}$ *donc* $u_n \sim 1$ *et* $\lim u_n = 1$.