

Interrogation 6 - CORRECTION

Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p , l'information reçue d'une personne est transmise telle quelle à la personne suivante. Avec une probabilité $1 - p$, l'information reçue d'une personne est transmise de façon contraire à la personne suivante. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1. On note I_n l'événement : "l'information après n transmissions est correcte".

Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n .

D'après la formule des probabilités totales, on sait que

$$P(I_{n+1}) = P(I_{n+1} | I_n) P(I_n) + P(I_{n+1} | \overline{I_n}) P(\overline{I_n})$$

Mais, $P(I_{n+1} | I_n) = p$ (l'information doit être transmise correctement) et $P(I_{n+1} | \overline{I_n}) = 1 - p$ (l'information doit être mal transmise). On en déduit que :

$$p_{n+1} = p \times p_n + (1 - p) \times (1 - p_n) = (2p - 1)p_n + (1 - p)$$

2. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n .

Indication : on pourra poser $u_n = p_n - \frac{1}{2}$ et vérifier que (u_n) est géométrique.

On a une suite arithmético-géométrique. Sa limite possible l vérifie

$$l = (2p - 1) \times l + (1 - p) \iff l = 1/2$$

On pose alors $u_n = p_n - \frac{1}{2}$ et on vérifie que (u_n) est géométrique de raison $(2p - 1)$. En effet :

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p - 1)p_n + (1 - p) - \frac{1}{2} = (2p - 1) \left(p_n - \frac{1}{2} \right)$$

On en déduit $u_n = (2p - 1)^n u_0$ avec $u_0 = p_0 - 1/2 = 1/2$. On conclut que :

$$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p - 1)^n$$

3. En déduire la valeur de $\lim_n p_n$.

Qu'en pensez-vous ?

Indication : on distinguera les cas $p = 0$, $p = 1$ et $p \in]0; 1[$.

On distingue alors trois cas :

- Si $p = 1$, l'information est transmise presque sûrement correctement, et $p_n = 1$ pour tout entier n .
- Si $p = 0$, l'information est presque sûrement mal transmise, et $p_{2n} = 1, p_{2n+1} = 0$ pour tout entier n .
- Si $p \in]0, 1[$, alors $|2p - 1| < 1$ et donc (p_n) converge vers $1/2$. On n'a plus de traces de l'information initiale !