Chap.38 : Espaces vectoriels

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces et sous espaces vectoriels

1.1 Définition

Définition 1.1. *On appelle* ***espace vectoriel*** *sur* $\mathbb{K}$ *(ou* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel) un ensemble* E *muni :*

- *d'une loi de composition interne* $+$ *:* $\begin{array}{c} E\times E\longrightarrow E \\ (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\mapsto \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\end{array}$
  1. *associative :* $\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\in E^3,(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})$
  2. *commutative :* $\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\in E^2,\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$ *;*
  3. *qui admet un élément neutre noté* $\overrightarrow{O}_E$ *:* $\forall\overrightarrow{u}\in E,\overrightarrow{u}+\overrightarrow{O}_E=\overrightarrow{u}$ *;*
  4. *telle que tout élément admet un opposé :*
$$\forall\overrightarrow{u}\in E,\exists\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{O}_E$$
- *d'une loi de composition externe* $\cdot$ *:* $\begin{array}{c}\mathbb{K}\times E\longrightarrow E \\ (\lambda,\overrightarrow{u})\mapsto\lambda\cdot\overrightarrow{u}\end{array}$
  1. *associative :* $\forall\overrightarrow{u}\in E,\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\lambda\cdot(\mu\cdot\overrightarrow{u})=(\lambda\mu)\cdot\overrightarrow{u}$
  2. *distributive par rapport à l'addition :*
$$\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\in E^2,\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\lambda\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=\lambda\cdot\overrightarrow{u}+\lambda.\overrightarrow{v}\ \text{ et }\ (\lambda+\mu)\cdot\overrightarrow{u}=\lambda\cdot\overrightarrow{u}+\mu\cdot\overrightarrow{v}$$
  3. *qui respecte le scalaire* 1 *:* $\forall\overrightarrow{u}\in E,1\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}$

Remarque 1.2.
- *Un espace vectoriel est un ensemble* ***stable par combinaison linéaire****.*
- *L'ensemble des vecteurs du plan est un* $\mathbb{R}-$*espace vectoriel et l'ensemble des vecteurs de l'espace est aussi un* $\mathbb{R}-$*espace vectoriel, et ce sont ces deux ensembles qui ont inspirés la notion d'espace vectoriel. En effet, on a pu observer dans le cadre d'autres ensembles d'objets mathématiques nettement plus complexes, que ces derniers se comportaient vis à vis de leurs règles opératoires de la même façon que les vecteurs.*

Exemple 1.3.
- $\mathbb{R}$ *est un* $\mathbb{R}-$*espace vectoriel ;*
- $\mathbb{C}$ *est un* $\mathbb{R}-$*espace vectoriel ;*

- $\mathbb{C}$ *est également un* $\mathbb{C}-$*espace vectoriel ;*
- *Si* $n \in \mathbb{N}^*$,$\mathbb{R}^n$ *est un* $\mathbb{R}-$*espace vectoriel.*

Proposition 1.4. *Soit* E *un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel et* $\overrightarrow{u} \in E$ *alors :*

- *L'opposé de* $\overrightarrow{u}$ *est unique, c'est le vecteur* $-1 \cdot \overrightarrow{u}$ *qui est noté* $-\overrightarrow{u}$*.*
- $0 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}_E$

1.2 Exemples de référence

Proposition 1.5.

- $\mathbb{R}^n$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *au sens des opérations définies dans le chapitre "Famille de vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *".*
- *Plus généralement,* $\mathbb{K}^n$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *en y transposant les opérations précédentes donnant à* $\mathbb{R}^n$ *une structure d'espace vectoriel.*

Dans les deux cas, le vecteurs nul est le $n-$*uplet* $\overrightarrow{O}_{\mathbb{K}^n} = (0, ..., 0)$*.*

Proposition 1.6. *Soit* $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *est un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel dont :*

- *l'élément neutre pour l'addition est la matrice nulle* $0_{n,p}$ *;*
- *l'opposée de la matrice* $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ *est la matrice* $-A = (-a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

Remarque 1.7. *Les vecteurs de l'espace vectoriel* $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *sont des matrices, mais on s'abstient de rajouter une flèche dans la notation existante, il en ira de même pour les exemples qui suivent.*

Proposition 1.8. $\mathbb{K}[X]$*, l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *est un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel dont :*

- *l'élément neutre est le polynôme nul* 0 *;*
- *l'opposé du polynôme* $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ *est le polynôme* $-P = -a_0 - a_1X + ... - a_nX^n$

Définition 1.9. *Soit un ensemble* Ω *non vide. L'ensemble des applications définies sur* Ω *et à valeurs dans* $\mathbb{K}$ *est noté* $\mathbb{K}^{\mathbf{\Omega}}$*.*

Proposition 1.10. *Soit un ensemble* Ω *non vide. Alors* $\mathbb{K}^\Omega$ *est un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel.*

Remarque 1.11. *L'ensemble des suites à valeurs dans* $\mathbb{K}$ *est* $\mathbb{K}^\mathbb{N}$*, il s'agit donc d'un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel.*

1.3 Produit cartésien d'espaces vectoriels

Proposition 1.12. *Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. On définit deux opérations sur le produit cartésien $E \times F$:*

- ***addition par composantes** , on pose :*

$$\forall (e_1, f_1) \in E \times F, \forall (e_2, f_2) \in E \times F, (e_1, f_1) + (e_2, f_2) = (e_1 + e_2, f_1 + f_2)$$

- ***produit de chaque composante par un scalaire**, on pose :*

$$\forall (e, f) \in E \times F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot (e, f) = (\lambda \cdot e, \lambda \cdot f)$$

Alors, muni de ces deux lois, $E \times F$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

Remarque 1.13. *On prolonge cette propriété à un produit fini de $\mathbb{K}-$espaces vectoriels : si $E_1, ..., E_n$ sont des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels alors $\prod_{i=1}^{n} E_i$ possède également une structure de $\mathbb{K}-$espace vectoriel avec les opérations définies par composantes.*

2 Sous-espaces vectoriels

Dans toute la suite, E désigne un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
Par ailleurs, le produit par un scalaire sera noté $\lambda \overrightarrow{u}$ au lieu de $\lambda \cdot \overrightarrow{u}$.

2.1 Combinaisons linéaires et sous-espaces vactoriels

Définition 2.1. *Une **combinaison linéaire** de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de E est un vecteur de la forme $\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.*

Exemple 2.2.

- *Soit le plan muni d'une base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Le vecteur $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{i}$ et de $\overrightarrow{j}$ car :*

$$\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$$

- *Dans l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, la fonction f définie par $f(x) = 2cos(x) - 4e^x$ est combinaison linéaire des fonctions cos et exp.*

Application 2.3. *Dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P = X + 3$ est-il combinaison linéaire de $P_1 = X - 2$ et de $P_2 = X + \frac{3}{2}$?*

Définition 2.4. *On dit que $F \subset E$ est un* ***sous-espace vectoriel*** *de E lorsque :*

- *F est non vide : $F \neq \emptyset$*
- *F est stable par combinaison linaire :*

$$\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F^2, \forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \in F$$

Proposition 2.5. *$F \subset E$ est un* ***sous-espace vectoriel*** *de E si et seulement si* $\begin{cases} 1.\overrightarrow{O}_E \in F \\ 2.\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F^2, \forall\lambda \in \mathbb{K}, \lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in F \end{cases}$

Application 2.6. *Soit $\mathscr{T}_2^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées triangulaires supérieures de taille 2. Démontrer que $\mathscr{T}_2^+(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$*

Application 2.7. *Soit $F = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, f(1) = 0\right\}$. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.*

Exemple 2.8.

- *Soit E un espace vectoriel, alors $F = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.*

- *Soit $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées triangulaires supérieures de taille n. Alors $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*
- *$\mathbb{K}_n[X]$, l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.*

2.2 Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Définition 2.9. *Soit $\mathscr{F} = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ une famille de vecteurs de E.*
On note $\boldsymbol{Vect(\mathscr{F})}$ l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $\mathscr{F}$.

$$Vect(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n) = \{\lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_n\vec{u}_n, (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^2\}$$

Proposition 2.10. *$Vect(\mathscr{F})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant la famille $\mathscr{F}$. On l'appelle le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathscr{F} = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$.*

Application 2.11. *On considère les deux sous-ensembles F et G de $\mathbb{R}^4$ définis par :*

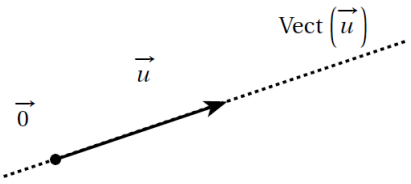
$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - 3y = 0\} \text{ et } G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y - 3z + t = 0\}$$

Démontrer que $F = Vect(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ et $G = Vect(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ où l'on explicitera les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ et $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

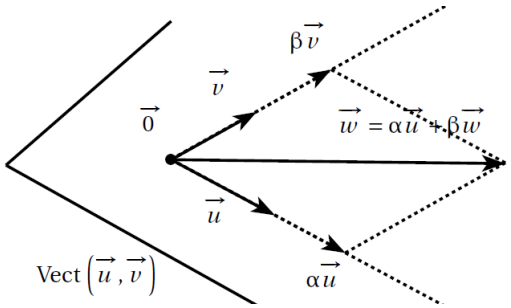
Définition 2.12. *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.*

Définition 2.13. *Soit F un sous-espace vectoriel de E.*

- *S'il existe un vecteur non nul $\vec{u} \in E$ tel que $F = Vect(\vec{u})$ alors on dit que F est une **droite vectorielle** de E.*



- *S'il existe deux vecteurs non nuls et non colinéaires* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v} \in E$ *tel que* $F = Vect(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *alors on dit que* F *est un* ***plan vectoriel*** *de* E.



Proposition 2.14. *Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E. *Alors* F *est lui-même un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel.*

Méthode 2.15. *Pour montrer qu'un ensemble* E *a une structure d'espace vectoriel :*

1. *On essaie de le voir comme un sous-ensemble d'un ensemble* $\mathscr{E}$ *qui est lui-même un* $\mathbb{K}-$*espace-vectoriel.*
2. *On montre que* E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{E}$, *de deux manières :*
   - *soit en vérifiant que les conditions de la définition d'un sous-espace vectoriel sont remplies ;*
   - *soit en écrivant* $E = Vect(\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_n)$

Application 2.16. *On se place dans* $\mathbb{R}^3$ *et on considère le sous ensemble :*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y + z = 0\}.$$

Démontrer que F *est un plan vectoriel et donner deux vecteurs qui l'engendrent.*

Application 2.17. *Démontrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle* $(E) : y' - t^2 y = 0$ *est une droite vectorielle de* $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *engendrée par une fonction que l'on identifiera.*

Application 2.18. *Démontrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle* (E) : $y'' - 6y' + 4y = 0$ *est un plan vectoriel* $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et donner deux fonctions qui l'engendrent.*

Théorème 2.19.

- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène est une droite vectorielle.
- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants homogène est un plan vectoriel.

Théorème 2.20. *L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p inconnues et à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^p$.

Application 2.21. *Soit le système* $\mathscr{S}$: $\left\{ \begin{array}{l} x + 3y - z = 0 \\ 2x + 5y + 3z = 0 \end{array} \right.$ *. Démontrer que l'ensemble des solutions est une droite vectorielle de* $\mathbb{R}^3$.

2.3 Somme de sous-espaces vectoriels

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriel de E.

Proposition 2.22. *$F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Exemple 2.23. *Soient les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:*

- $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 3y - z = 0\}$
- $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + 5y + 3z = 0\}$

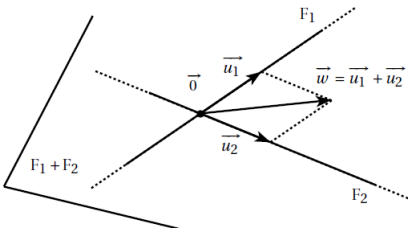
Alors $F_1 \cap F_2$ est une droite vectorielle (Cf. Application 2.21).

Définition 2.24. *On appelle **somme** de F et G le sous-ensemble de E dont les éléments se décomposent en une somme d'un élément de F et d'un élément de G :*

$$F + G = \{\overrightarrow{u} \in E, \exists(\overrightarrow{u}_F, \overrightarrow{u}_G) \in F \times G, \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}_F + \overrightarrow{u}_G\}$$

Proposition 2.25. *$F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contienne $F \cup G$.*

Application 2.26. *On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on considère $F_1 = Vect((1; 1; 1))$ et $F_2 = Vect((1; 2; 1))$.*
Décrire $F_1 + F_2$.



Définition 2.27.

- *La somme $F+G$ est dite **directe** lorsque la décomposition $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}_F + \overrightarrow{u}_G$ est unique.*
  Autrement dit :

$$F + G \text{ est directe}$$
$$\Leftrightarrow \forall \overrightarrow{u} \in F + G, \exists!(\overrightarrow{u}_F, \overrightarrow{u}_G) \in F \times G, \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}_F + \overrightarrow{u}_G$$

On note alors $\boldsymbol{F \oplus G}$ au lieu de $F + G$.

- *Lorsque la somme $F \oplus G$ est directe et qu'elle vaut E, on dit que F et G sont* ***supplémentaires****.*

Proposition 2.28. *F et G sont en somme directe, si et seulement si,*

$$F \cap G = \left\{ \overrightarrow{0}_E \right\}$$

Méthode 2.29. *Pour montrer que $F + G$ est directe :*

- *soit on utilise directement la définition ;*
- *soit on montre que $F \cap G = \overrightarrow{0}_E$ par double inclusion :*
  - *$\left\{ \overrightarrow{0}_E \right\} \subset F \cap G$ est triviale car $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E donc contient $\overrightarrow{0}_E$;*
  - *pour $F \cap G \subset \left\{ \overrightarrow{0}_E \right\}$, on se donne un élément quelconque de $F \cap G$ et on montre qu'il vaut nécessairement le vecteur nul.*

Application 2.30. *Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ avec $F = Vect((1;2;1))$ et $G = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y - z = 0\}$.*

Application 2.31. *Démontrer que l'ensemble $\mathscr{P}$ des fonctions paires et l'ensemble $\mathscr{I}$ des fonctions impaires sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.*

3 Familles finies de vecteurs

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. On considère une famille finie de vecteurs de E : $(\overrightarrow{u}_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$.

3.1 Familles libres ou liées

Définition 3.1. *On dit que* $(\overrightarrow{u}_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ *est une* ***famille libre*** *de* E *lorsque son unique combinaison linéaire nulle est triviale (c'est-à-dire avec tous les coefficients nuls). Autrement dit :*

$$\forall(\lambda_1,...,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n, \lambda_1\overrightarrow{u}_1+...+\lambda_n\overrightarrow{u}_n=\overrightarrow{0}_E \Rightarrow \lambda_1=...=\lambda_n=0$$

On dit aussi que les vecteurs $\overrightarrow{u}_1,...,\overrightarrow{u}_n$ *sont* ***linéairement indépendants****. Dans le cas contraire, on dit que la famille est* ***liée****.*

Application 3.2. *Dans* $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$*, la famille* (cos, sin, exp) *est libre.*

Application 3.3. $A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ *et* $A_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ *forment-elles une famille libre de* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

Proposition 3.4. *Soit une famille de polynômes non nuls* $(P_1,...,P_n)$ *de* $\mathbb{K}[X]$.
Si $0\leq deg(P_1)<...<deg(P_n)$ *alors cette famille est libre dans* $\mathbb{K}[X]$.
Autrement dit, si la famille est ***échelonnée en degré*** *alors elle est libre.*

Exemple 3.5.
- *La famille* $(2, X^2+1, X^3-2X)$ *est échelonnée en degré donc elle est libre.*
- ***Attention ! ! !*** *La famille* $(X^2+X, X^3-2X^2, X^3+X^2-X)$ *n'est pas échelonnée en degré, ce qui ne signifie pas qu'elle est liée (on peut d'ailleurs vérifier qu'elle est libre).*

3.2 Familles génératrices, bases

Définition 3.6. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. La famille $(\overrightarrow{u}_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est dite* ***génératrice*** *de F lorsque :*

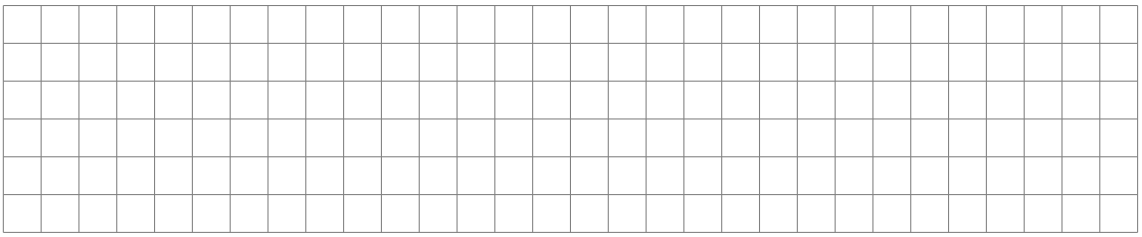
$$Vect((\overrightarrow{u}_i)_{i\in[\![1;n]\!]}) = F$$

Autrement dit :

$$\forall \overrightarrow{u} \in F, \exists(\lambda_1,...,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \overrightarrow{u} = \lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \lambda_n \overrightarrow{u}_n$$

Application 3.7. *Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = Vect(P_1, P_2, P_3, P_4)$ où :*

$$P_1 = 1, P_2 = 2X, P_3 = X - 1 \text{ et } P_4 = (X-1)^2.$$



Définition 3.8. *On dit que la famille $(\overrightarrow{u}_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une* ***base*** *de E lorsqu'elle est à la fois libre et génératrice.*

Proposition 3.9. *Soit $\mathscr{B} = (\overrightarrow{u}_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une famille de vecteurs de E. Il y a équivalence entre :*

- *$\mathscr{B}$ est une base de E*
- *tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de $\mathscr{B}$:*

$$\forall \overrightarrow{v} \in F, \exists!(\lambda_1,...,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \lambda_n \overrightarrow{u}_n$$

$\lambda_1,...,\lambda_n$ sont les ***coordonnées*** *de $\overrightarrow{v}$ dans la base $\mathscr{B}$.*
Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $\lambda_i \overrightarrow{u}_i$ est la composante de $\overrightarrow{v}$ selon $\overrightarrow{u}_i$.
$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix}$ *est la matrice colonne de $\overrightarrow{v}$ dans la base $\mathscr{B}$, on la note* $\boldsymbol{Mat_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{v})}$.

Exemple 3.10.

- *La famille $(\overrightarrow{e}_1,...,\overrightarrow{e}_{n)}$ avec $\overrightarrow{e}_i = (0,0,...,0,1,0,...,0)$ où 1 est à la $i^{ème}$ place est une base de $\mathbb{K}^n$.*
- *La famille $(1, X, X^2, ..., X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.*
- *Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on considère la matrice $E_{i,j}$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de celui situé sur la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne qui vaut 1.*
  Alors la famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Les bases données ci-dessus sont dites ***canoniques*** *pour l'espace considérée, c'est à dire celles qui sont les plus naturelles.*

3.3 Base adaptée à une somme directe

Proposition 3.11. *Soient F et G deux sous-espaces de E qui sont en somme directe.*
On suppose que $\mathscr{B}_F = (\overrightarrow{f}_1, ..., \overrightarrow{f}_n)$ et $\mathscr{B}_G = (\overrightarrow{g}_1, ..., \overrightarrow{g}_p)$ sont des bases de F et G.
Alors $(\overrightarrow{f}_1, ..., \overrightarrow{f}_n, \overrightarrow{g}_1, ..., \overrightarrow{g}_p)$ est une base de $F \oplus G$.
*On dit que cette base est **adaptée** à $F \oplus G$.*

Application 3.12. *Soient $\overrightarrow{u}_1 = (0; 1; -2; 1)$, $\overrightarrow{u}_2 = (1; 0; 2; -1)$, $\overrightarrow{u}_3 = (3; 2; 2; -1)$, $\overrightarrow{u}_4 = (0; 0; 1; 0)$ et $\overrightarrow{u}_5 = (0; 0; 0; 1)$.*

1. *Démontrer que $F = Vect(\overrightarrow{u}_4, \overrightarrow{u}_5)$ et $G = Vect(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3)$ sont en somme directe.*
2. *Déterminer une base de F, puis une base de G.*
3. *En déduire une base adaptée de $F \oplus G$.*

Proposition 3.13. *Si $(\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_k, \overrightarrow{u}_{k+1}, ..., \overrightarrow{u}_n)$ est libre dans E alors $F = vect(\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_k)$ et $G = Vect(\overrightarrow{u}_{k+1}, ..., \overrightarrow{u}_n)$ sont en somme directe.*