Interrogation 1

1. On note $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$.
   (a) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   On admettra le résultat pour G.
   $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = -y - z\}$
   $F = \{(-y - z, y, z)/(y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \{y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)/(y, z) \in \mathbb{R}^2\}$
   $F = Vect((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$
   F est donc bien un sous-espace-vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Montrez que $F \cap G$ est une droite vectorielle, en donner une base.
   $(x, y, z)\ F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z \\ (-y - z) - y + z = 0 \end{cases}$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 - z = -z \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = (-z, 0, z) = z(-1, 0, 1).$
   Donc $F \cap G = Vect((-1, 0, 1))$ est bien une droite vectorielle.
2. Soient E un espace vectoriel E, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Qu'appelle-t-on somme de F et G ?
   $F + G = \{\vec{f} + \vec{g}, (\vec{f}, \vec{g}) \in F \times G\}$
   (b) Quand dit-on que F et G sont supplémentaires dans E ?
   On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E si, et seulement si, tout vecteur $\vec{u}$ de E s'écrit de manière unique sous la forme $\vec{u} = \vec{f} + \vec{g}$ avec $(\vec{f}, \vec{g}) \in F \times G$.
   On dit alors que E est somme directe de F et G, et on note :
   $$E = F \oplus G.$$
   (c) Donnez la caractérisation équivalente de $E = F \oplus G$.
   Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les affirmations suivantes sont équivalentes :
      i. F et G sont supplémentaires dans E ;
      ii. $F \cap G = \{0_E\}$ et $E = F + G$.
3. Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0 \ et \ z = 2y\}$. On admettra que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   Démontrer que F (Q.1) et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   Montrons tout d'abord que F et H sont en somme directe.
   Soit $(x, y, z) \in F \cap G$ alors $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = 0 \\ z = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 + y + 2y = 0 \\ x = 0 \\ z = 2y \end{cases} \Leftrightarrow$

$x = y = z$.
Donc $(x, y, z) = \overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^3}$ et la somme est bien directe.

Nous savons que $F = Vect((-1, 1, 0), (-1, 0, 1)) = Vect(\mathscr{F})$. De plus $(-1, 1, 0)$ et$(-1, 0, 1)$ ne sont pas colinéaires donc $\mathscr{F}$ est libre.
$\mathscr{F}$ est libre et génératrice de F, c'est donc une base de F et $dim(F) = 2$.
$H = Vect((0, 1, 2))$ est une droite vectorielle donc $dim(H) = 1$.
On sait que $dim(F) + dim(H) = dim(\mathbb{R}^3)$ donc F et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.