Programme de colle 24

Semaine du 26 avril 2021

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire (5-10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

Dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad .$$

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. *1. Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - I.$$

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.

2. Soit $E = \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E / f(0) = f'(0) = 0\}$.

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

(b) Soit

$$G = \left\{ x \mapsto ax + b; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Montrer que G est un supplémentaire de F dans E.

Exercice 2.2. *1. Soient a et b des réels non nuls, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.*

2. *Calculer la puissance n-ième de la matrice suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.3. *Soient (a_n), (b_n) et (c_n) trois suites réelles telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $c_0 = 7$, et vérifiant les relations de récurrence :*

$$\left\{\begin{array}{rclll} a_{n+1} & = & 3a_n + & b_n & \\ b_{n+1} & = & & 3b_n + & c_n \\ c_{n+1} & = & & & 3c_n \end{array}\right.$$

On souhaite exprimer a_n, b_n, et c_n uniquement en fonction de n.

1. *On considère le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$. En déduire que $X_n = A^n X_0$.*
2. *Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2, N^3, puis N^p pour $p \geq 3$.*
3. *Montrer que :*

$$A^n = 3^n I + 3^{n-1} n N + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2.$$

4. *En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de n.*

3 Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

Chap.39 : Calcul matriciel

1 Généralités sur les matrices

2 Opérations sur les matrices
2.1 Combinaison linéaire de matrices
2.2 Produit de deux matrices

3 Matrices carrées
3.1 Généralités
3.2 Matrices carrées inversibles
3.3 Caractérisation des matrices inversibles par les systèmes linéaires

4 Application linéaire canoniquement associée à une matrice
$Ker(A)$ et $Im(A)$.

Chap.40 : Espaces vectoriels

1 Espaces et sous espaces vectoriels
1.1 Définition
1.2 Exemples de référence
1.3 Produit cartésien d'espaces vectoriels

2 Sous-espaces vectoriels
2.1 Combinaisons linéaires et sous-espaces vectoriels
2.2 Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs
2.3 Somme de sous-espaces vectoriels