Devoir-Maison 3 - CORRECTION

Exercice 0.1. *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.*

On considère la propriété $\mathscr{P}_n$: "$2^{n-1} \leq n! \leq n^n$".

Initialisation : Pour $n = 1$:
- $2^{n-1} = 2^{1-1} = 2^0 = 1$
- $1! = 1$
- $1^1 = 1$

Or $1 \leq 1 \leq 1$ donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Supposons la propriété $\mathscr{P}_n$ vraie à un certain rang $n \geq 1$. Démontrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
On sait que :
- $(n+1)! = (n+1) \times n!$
- $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$

Il vient, en multipliant membre à membre par $n+1 > 0$ dans l'encadrement :

$$2^{n-1}(n+1) \leq (n+1)! \leq (n+1)n^n$$

Or :
- $1 \leq n \Leftrightarrow 2 \leq n+1$ donc, en multipliant chaque membre par 2^{n-1} :

$$2^n = 2 \times 2^{n-1} \leq 2^{n-1}(n+1) \leq (n+1)!$$

- $(n+1)! \leq (n+1)n^n \leq (n+1) \times (n+1)^n = (n+1)^{n+1}$ car $n \leq n+1$

Finalement : $2^n \leq (n+1)! \leq (n+1)^{n+1}$. La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc démontrée.
Conclusion : $\mathscr{P}_1$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire. Par principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}_n$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 0.2. *On souhaite démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout réel $x > 0$, on a :*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

1. *La récurrence porte-t-elle sur n ? Sur x ? Sur les deux ?*
   La récurrence ne peut porter que sur un seul paramètre entier. Ici, il s'agit donc de n.

2. *Énoncer l'hypothèse de récurrence.*
   On considère la propriété $\mathscr{P}_n$: "$\forall x > 0, (1+x)^n \geq 1+nx$" *pour* $n \in \mathbb{N}$.
3. *Vérifier que* $(1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2$.
   $(1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2$
4. *Rédiger la démonstration.*

Initialisation : Pour $n = 0$:

- $(1+x)^0 = 1$
- $1+0x = 1$

Or $1 \geq 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Supposons la propriété $\mathscr{P}_n$ vraie à un certain rang $n \geq 0$. Démontrons qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
Soit $x > 0$. On sait que :

- $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$
- $(1+x)^n \geq 1+nx$

Il vient, en multipliant membre à membre par $1+x > 0$ dans l'inégalité :

$$(1+x)^n \times (1+x) \geq (1+nx)(1+x)$$
$$\Leftrightarrow (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2$$

Or $1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$ car $nx^2 \geq 0$ donc :

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc démontrée.
Conclusion : $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire. Par principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}_n$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 0.3. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *les équations suivantes :*

1. $sin(x+\frac{3\pi}{4}) = cos(\frac{x}{4}) \Leftrightarrow sin(x+\frac{3\pi}{4}) = sin(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4})$
   $\Leftrightarrow x+\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ *ou* $x+\frac{3\pi}{4} = \pi-(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4})+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
   $\Leftrightarrow \frac{5x}{4} = \frac{-\pi}{4}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ *ou* $\frac{3x}{4} = \frac{-\pi}{4}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
   $\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{5}+\frac{8k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$ *ou* $x = \frac{-\pi}{3}+\frac{8k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
   Donc $\mathscr{S} = \left\{\frac{-\pi}{5}+\frac{8k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{-\pi}{3}+\frac{8k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
2. $tan(2x) = 1$
   $D_f = \{x \in \mathbb{R}, 2x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$
   Si $x \in D_f$ *alors :*
   $tan(2x) = 1 \Leftrightarrow \frac{sin(2x)}{cos(2x)} = 1 \Leftrightarrow sin(2x) = sin(\frac{\pi}{2}-2x)$
   $\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2}-2x+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ *ou* $2x = \pi-(\frac{\pi}{2}-2x)+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
   $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
   Donc $\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

3. $cos(2x) + sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}cos(2x) + \frac{\sqrt{2}}{2}sin(2x)) = 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{2}(cos(\frac{\pi}{4})cos(2x) + cos(\frac{\pi}{4})sin(2x)) = 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{2}cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$Donc\ \mathscr{S} = \left\{\frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

4. $\sqrt{3}sin(x) + cos(x) = 1 \Leftrightarrow 2(\frac{\sqrt{3}}{2}sin(x) + \frac{1}{2}cos(x)) = 1$
$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}sin(x) + \frac{1}{2}cos(x) = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow sin(\frac{\pi}{3})sin(x) + cos(\frac{\pi}{3})cos(x) = cos(\frac{\pi}{3})$
$\Leftrightarrow cos(x - \frac{\pi}{3}) = cos(\frac{\pi}{3})$
$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$Donc\ \mathscr{S} = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$