Devoir Surveillé 3

Durée : 3 heures

Calculatrice interdite

Exercice 0.1. *On travaille dans un repère orthonormé direct dans lequel on considère les points :*

$$A(1\ ;\ 2\ ;\ 7), B(2\ ;\ 0\ ;\ 2), C(3\ ;\ 1\ ;\ 3), D(3\ ;\ -6\ ;\ 1) E(4\ ;\ -8\ ;\ -4).$$

1. *Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.*
2. *Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace, où b et c désignent deux nombres réels.*
   (a) *Déterminer les valeurs de b et c telles que $\overrightarrow{u}$ soit un vecteur normal au plan (ABC).*
   (b) *En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :*
   $$x - 2y + z - 4 = 0.$$
   (c) *Le point D appartient-il au plan (ABC) ?*
3. *On considère la droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations paramétriques est* $\mathscr{D}: \begin{cases} x = 2t+3 \\ y = -4t+5 \\ z = 2t-1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
   (a) *La droite $\mathscr{D}$ est-elle orthogonale au plan (ABC) ?*
   (b) *Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan (ABC).*
   (c) *Déterminer la distance du point A à la droite $\mathscr{D}$.*
4. *Étudier la position relative de la droite (DE) par rapport au plan (ABC).*

Exercice 0.2. *On considère l'équation différentielle :*

$$(E) : xy' + (1-x)y = \frac{xe^x}{x^2+1}$$

1. *Résoudre* (E) *sur* $]0;+\infty[$.
   Indication : $\frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$
2. *Existe-t-il une solution de* (E) *qui prend la valeur* 0 *pour* $x = 1$ *?*

Exercice 0.3. *k étant un nombre réel fixé, on cherche sur $\mathbb{R}$ les solutions de l'équation différentielle :*

$$(E_k) : y'' - 2ky' + (k^2+1)y = sin(t) + e^{kt}$$

On appelle (F_k) et (G_k) les équations différentielles suivantes :

$$(F_k) : y'' - 2ky' + (k^2+1)y = sin(t)$$
$$(G_k) : y'' - 2ky' + (k^2+1)y = e^{kt}$$

1. *Résoudre l'équation homogène (H_k) associée à l'équation (E_k).*
2. *On suppose dans cette question que $k = 0$. Déterminer une solution particulière de (F_0).*
3. *On suppose dans cette question que $k \neq 0$. Déterminer une solution particulière y_{P_1} de (F_k).*
4. *Déterminer une solution particulière y_{P_2} de (G_k).*
5. *En déduire l'ensemble des solutions de (E_k) suivant les valeurs de k.*

Exercice 0.4. *On se propose dans cet exercice de calculer :*

$$S = \frac{1}{2} + cos(\frac{2\pi}{7}) + cos(\frac{4\pi}{7}) + cos(\frac{6\pi}{7}).$$

Pour $k \in \{0;1;2;3;4;5;6\}$, on note $z_k = e^{\frac{2k\pi i}{7}}$.

1. (a) *Vérifier que, pour tout $k \in \{0;1;2;3;4;5;6\}, (z_k)^7 = 1$.*
   (b) *Donner alors la valeur de la somme $A = \sum\limits_{k=0}^{6} z_k$. Justifier votre réponse.*
   (c) *Justifier que $z_6 = \overline{z_1}, z_5 = \overline{z_2}$ et $z_4 = \overline{z_3}$.*
2. *Montrer que $A = 1 + 2\sum\limits_{k=1}^{3} Re(z_k)$.*
3. *Pour $k \in \{1;2;3\}$, exprimer z_k en fonction de $cos(\frac{2\pi}{7}), cos(\frac{4\pi}{7})$ et $cos(\frac{6\pi}{7})$.*
4. *Que vaut S ? Justifier.*