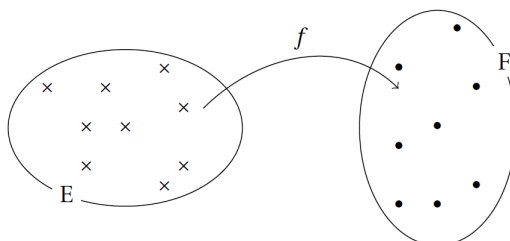


Chap.24 : Applications et ensembles finis

1 Généralités

Définition 1.1. Soient deux ensembles E et F et $f : \begin{cases} E \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ une application de E dans F .

On dit que E est l'**ensemble de départ** et F l'**ensemble d'arrivée**.

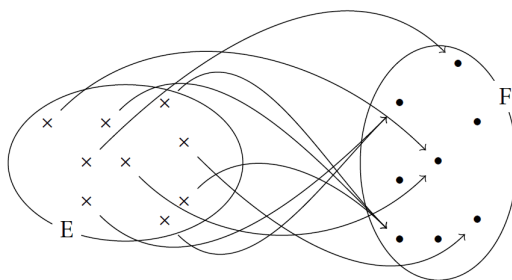


Remarque 1.2. • Tous les éléments de E ont une image par f . Pour tout $x \in E$, $f(x)$ est l'image de x par f .

- Les éléments de F ne sont pas toujours l'image d'un élément de E par f .

Lorsque $y \in F$ est tel qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, on dit que x est un **antécédent** de y par f .

Un élément $y \in F$ peut posséder plusieurs antécédents par f :



Définition 1.3. L'ensemble

$$E \times F = \{(x, y), x \in E, y \in F\}$$

est appelé **produit cartésien** des deux ensembles E et F .

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$. On peut généraliser cette définition au produit cartésien de n ensembles :

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n\}$$

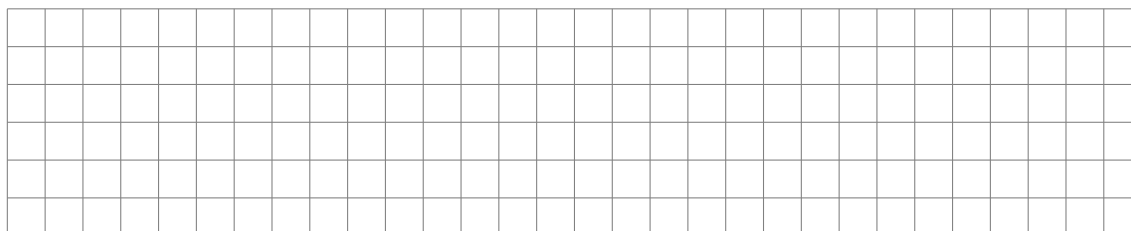
Définition 1.4. Soit $f : \begin{cases} E \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$, le sous-ensemble de $E \times F$ défini par :

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y) \in E \times F, y = f(x)\} = \{(x, f(x)), x \in E\}$$

est appelé le **graphe** de f .

Remarque 1.5. Pour $f : \begin{cases} \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ une **fonction numérique**, la courbe représentative de f dans un repère du plan est l'ensemble des points $M(x; f(x))$ avec x qui décrit le domaine de définition $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$. $\mathcal{G}_f$ est un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f \times \mathbb{R}$ qui est représenté par la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans le plan.

Application 1.6. Soit $f : \begin{cases} \{0, 1, 2, \dots, 8\} \rightarrow \mathbb{N} \\ x \mapsto \text{le reste de la division euclidienne par } 3 \end{cases}$.
Expliciter $\mathcal{G}_f$.



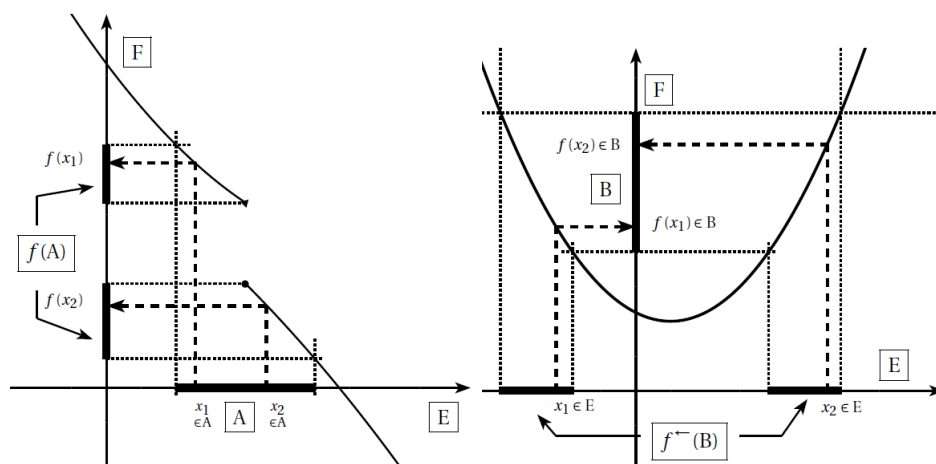
Définition 1.7. Soient $f : \begin{cases} E \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ et deux sous-ensembles $A \subset E$ et $B \subset F$.

- On appelle **image directe** de A par f le sous-ensemble de F noté $f(A)$:

$$f(A) = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\} = \{f(x), x \in A\}$$

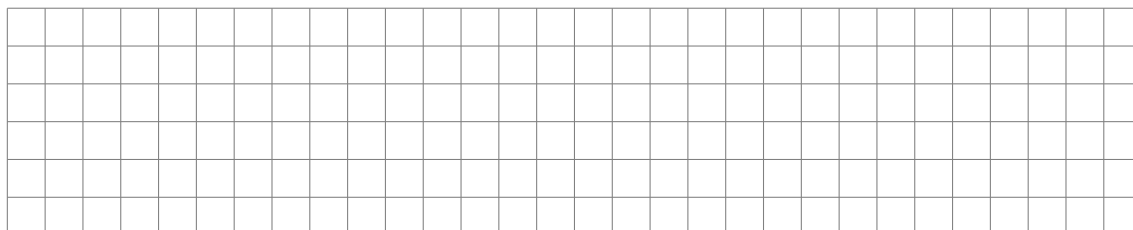
- On appelle **image réciproque** de B par f le sous-ensemble de E :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$$



Application 1.8. Soit $f : \begin{cases} \{0, 1, 2, \dots, 8\} \rightarrow \mathbb{N} \\ x \mapsto \text{le reste de la division euclidienne par } 3 \end{cases}$.

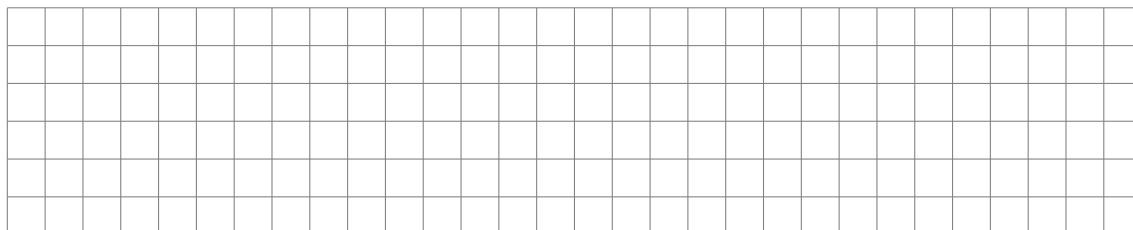
1. Déterminer $f(A)$ si A est l'ensemble des entiers pairs entre 2 et 8.
2. Déterminer $f^{-1}(B)$ si :
 - (a) $B = \{0\}$
 - (b) $B = \{1; 2\}$



Application 1.9. 1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$. Déterminer :

- (a) $f([-3; 2])$ et $f([-5; -1])$.
- (b) $f^{-1}([-3; 4])$ et $f^{-1}([-5; -1])$.

2. Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{it} \end{cases}$. Déterminer $g(\mathbb{R})$ et $g^{-1}(\{-i, i\})$.



Définition 1.10. • Soit un ensemble $A \subset E$ et $f : \begin{cases} E \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$. On appelle **restriction** de f à A l'application :

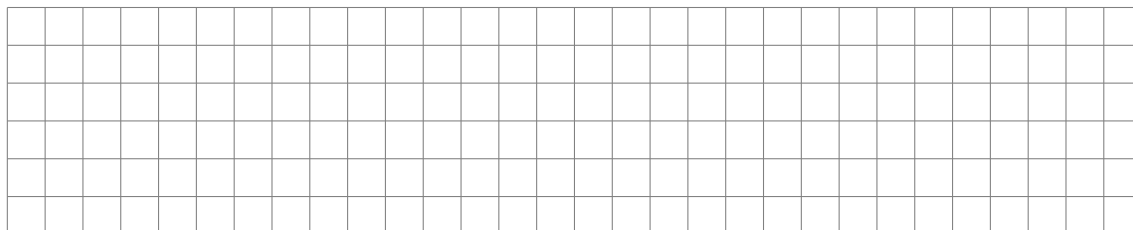
$$f|_A : \begin{cases} A \rightarrow F \\ x \mapsto f|_A = f(x) \end{cases}$$

- On appelle **application identité** l'application : $Id_E : \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto x \end{cases}$
- Soient trois ensembles E, F et G et deux applications $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.
La **composée** de f par g est l'application :

$$g \circ f : \begin{cases} E \rightarrow G \\ x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{cases}$$

Application 1.11. Expliciter $f \circ g$ et $g \circ f$ si :

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ x \mapsto 2x \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{2} \text{ si } x \text{ est pair} \\ \frac{x-1}{2} \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$$



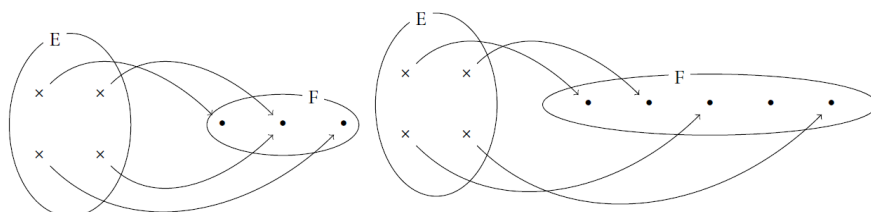
2 Injection, surjection et bijection

Dans tout ce qui suit $f : \begin{cases} E \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ est une application de E dans F .

Définition 2.1. On dit que f est une **injection** de E dans F ou que f est **injective** sur E lorsque tout élément de F admet au plus un antécédent par f :

$$\forall (x, x') \in E \times E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

Deux éléments distincts de E ont des images distinctes par f .

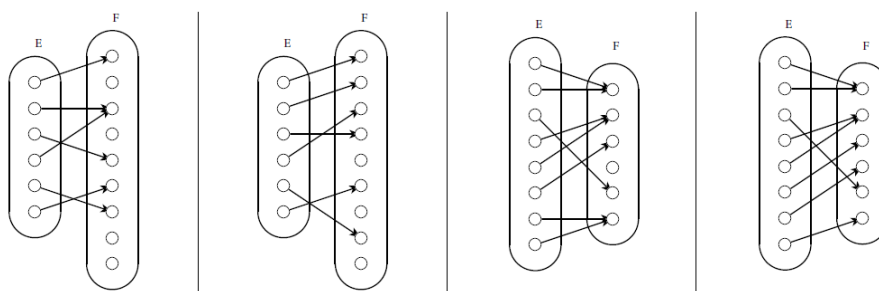


Définition 2.2. On dit que f est une **surjection** de E dans F ou que f est surjective dans F lorsque tout élément de F admet au moins un antécédent par f :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$$

Tout élément de F est image d'un élément de E par f .

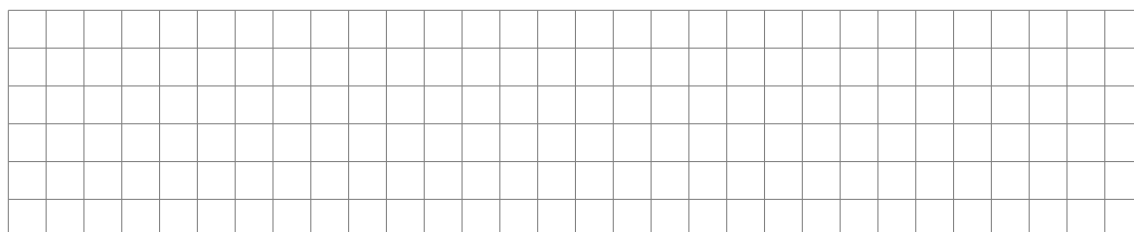
Application 2.3. Parmi les applications $f : E \rightarrow F$ représentées à l'aide des diagrammes suivants, lesquelles sont injectives ? surjectives ?



Application 2.4. 1. $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ est-elle injective ? surjective ?

2. $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ est-elle injective ? surjective ?

3. $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ est-elle injective ? surjective ?

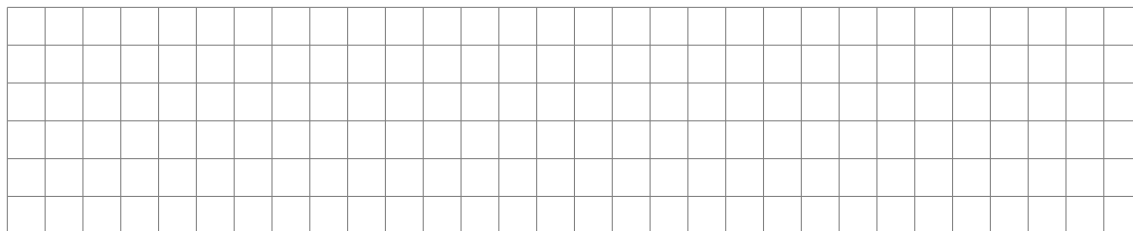


Application 2.5. Étudier l'injectivité et la surjectivité des fonctions suivantes :

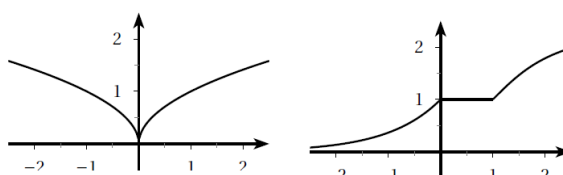
1. $f : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ x \mapsto 2x \end{cases}$

3. $f : \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \bar{z} \end{cases}$

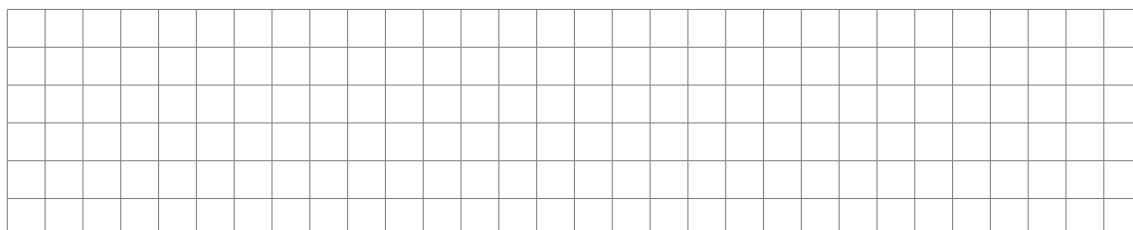
2. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (2x + y, x + y) \end{cases}$



Application 2.6. 1. On donne les représentations graphiques de fonctions numériques $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dans chaque cas, renseigner l'injectivité et la surjectivité :



2. Faire de même si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$

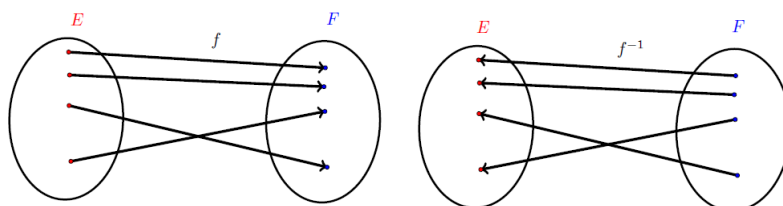


Définition 2.7. On dit que f est une **bijection** de E dans F ou que f est **bijjective**, lorsqu'elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire quand tout élément de F possède un unique antécédent par f :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y$$

Lorsque cela est le cas, l'application de F dans E qui à tout élément $y \in F$ associe son unique antécédent $x \in E$ est appelée l'**application réciproque** de f et notée

$$f^{-1} : \begin{cases} F \rightarrow E \\ y \mapsto f^{-1}(y) \end{cases}$$



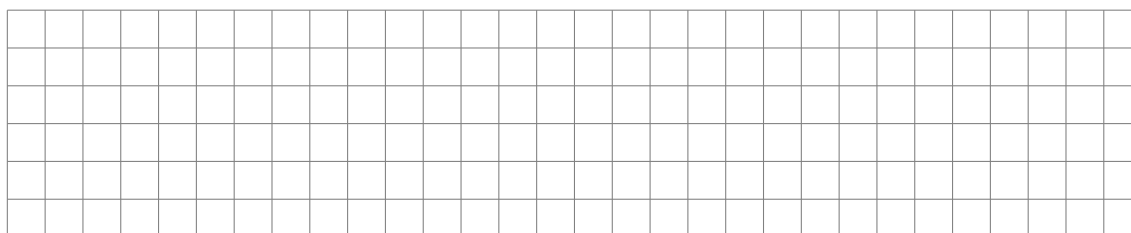
Exemple 2.8. • $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ a pour application réciproque

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$$

• $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto e^x \end{cases}$ a pour application réciproque $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) \end{cases}$

Application 2.9. Soit l'application $f : \begin{cases}]-1; 1] \rightarrow]-\infty; \frac{1}{2}] \\ x \mapsto \frac{x}{1+x} \end{cases}$

1. Démontrer que $\frac{y}{1-y} = -1 + \frac{1}{1-y}$.
2. Montrer que si $y \in]-\infty; \frac{1}{2}]$ alors $\frac{y}{1-y} \in]-1; 1]$.
3. Démontrer que f est une bijection de $] -1; 1]$ sur $]-\infty; \frac{1}{2}]$ et donner l'expression de la fonction réciproque.



Proposition 2.10. Soit f une bijection de E sur F , alors :

- $\forall x \in E, f^{-1}(f(x)) = x$
- $\forall x \in F, f(f^{-1}(x)) = x$

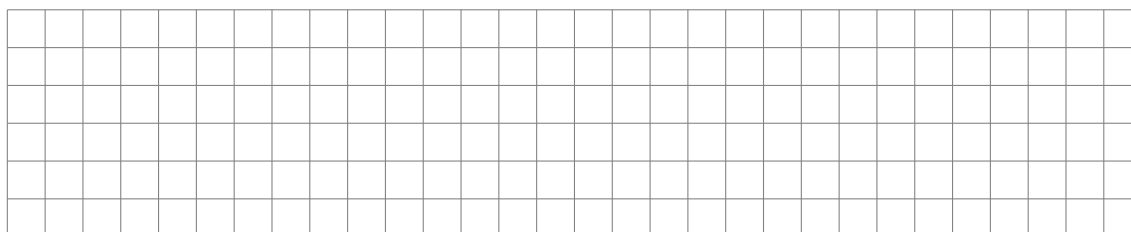
Proposition 2.11. Soit une application $f : E \rightarrow F$.

S'il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que :

$$\forall x \in E, g(f(x)) = x \text{ et } \forall x \in F, f(g(x)) = x$$

alors f est une bijection de E sur F avec $f^{-1} = g$.

Application 2.12. Soient les applications $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow]-1; 1[\\ x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \end{cases}$ et $f : \begin{cases}]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(\frac{1+x}{1-x}) \end{cases}$.
déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$, que peut-on en déduire ?



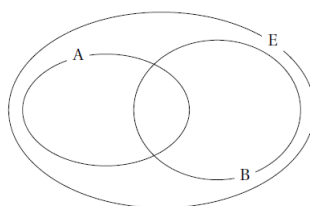
3 Cardinal d'un ensemble fini

Par la suite, E et F désigneront deux ensembles et A, B et C seront des sous-ensembles de E .

3.1 Opérations sur les ensembles

Définition 3.1. • La **réunion** de A et de B est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A **ou** à B , elle est notée $A \cup B$:

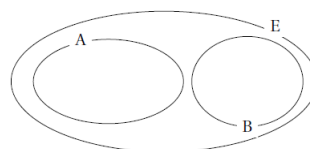
$$A \cup B = \{x \in E, x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



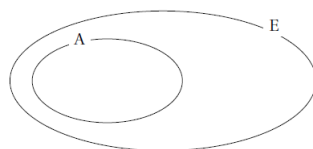
- L'**intersection** de A et de B est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A **et** à B , elle est notée $A \cap B$:

$$A \cap B = \{x \in E, x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont **disjoints**.



- Le **complémentaire** de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A , il est noté $\overline{A}$: $\overline{A} = \{x \in E, x \notin A\}$
On note parfois $C_E A$.



Application 3.2. 1. $[0; 2] \cap]1; 3] =$

2. $[0; 2] \cup]1; 3] =$

3. $\overline{[0; 2]} =$

Proposition 3.3.

- Proposition 3.4.**
- $\overline{\overline{A}} = A$
 - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
 - $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
 - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

[illegible][illegible]
$$A = E \Leftrightarrow \text{card}(A) = \text{card}(E)$$

3.3 Lien entre cardinal, injectivité, surjectivité et bijectivité

Théorème 3.9. Soit $f : \begin{cases} E \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$.

- Si f est injective et si F est fini alors :

$$E \text{ est fini et } \text{card}(E) \leq \text{card}(F)$$

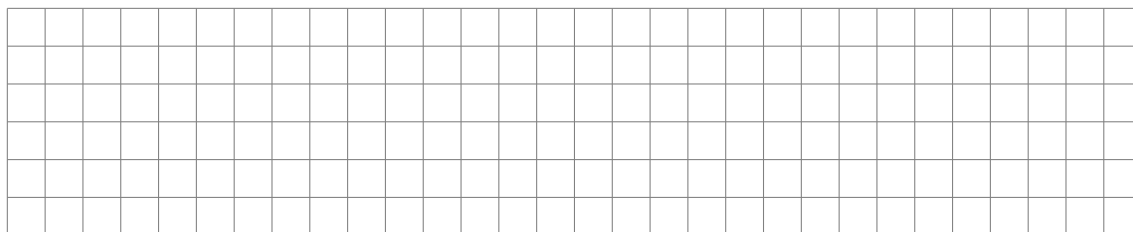
- Si f est surjective et si E est fini alors :

$$F \text{ est fini et } \text{card}(E) \geq \text{card}(F)$$

- Si f est bijective et si E ou F est fini alors :

$$E \text{ et } F \text{ sont finis et } \text{card}(E) = \text{card}(F)$$

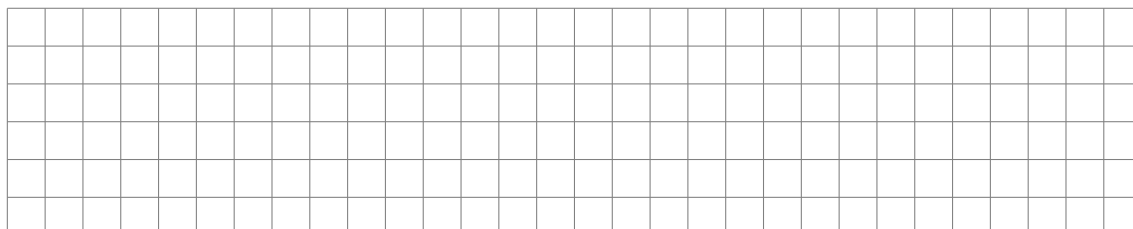
Preuve :



Théorème 3.10. Soient deux ensembles finis E et F tels que $\text{card}(E) = \text{card}(F)$ et soit $f : \begin{cases} E \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$.

- Si f est injective alors elle est bijective.
- si f est surjective alors elle est bijective.

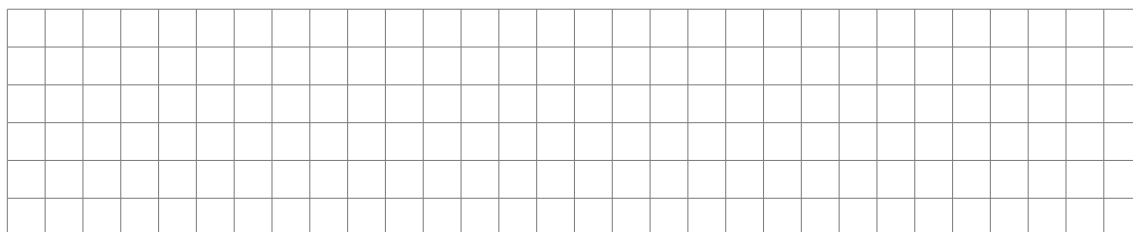
Preuve :



- $\diamond$ l'ensemble des cartes de carreau ;
- $\clubsuit$ l'ensemble des cartes de trèfle.

On note également T l'ensemble des cartes qui sont un valet, une dame, un roi ou un as.

1. (a) Préciser les cardinaux des ensembles $\heartsuit, \spadesuit, \diamond, \clubsuit$ et T .
(b) Calculer les cardinaux de leurs complémentaires.
2. Soit A l'ensemble des cartes qui sont noires et également de T . Exprimer A et $\bar{A}$ en fonction des ensembles introduits plus haut. Calculer alors les cardinaux de A et $\bar{A}$.
3. Même question avec l'ensemble B des cartes qui sont des trèfles n'appartenant pas à T .



3.5 Ensemble des parties d'un ensemble fini

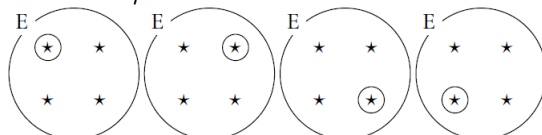
Définition 3.15. Soit E un ensemble, l'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

$$\mathcal{P}(E) = \{E', E' \subset E\}$$

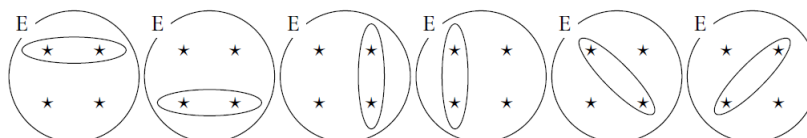


Exemple 3.16. On considère un ensemble E possédant 4 éléments :

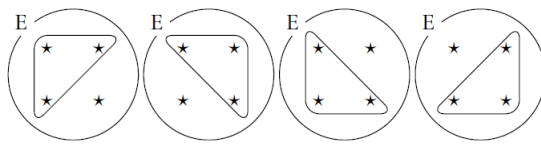
- Il existe un sous-ensemble de E ne contenant aucun élément : $\emptyset$
- Il existe 4 sous-ensembles de E ne contenant qu'un seul élément :



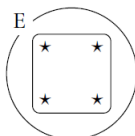
- Il existe 6 sous-ensembles de E contenant deux éléments :



- Il existe 4 sous-ensembles de E contenant trois éléments :



- Il existe un sous-ensembles de E contenant quatre éléments :



Théorème 3.17. Si E est fini alors $\mathcal{P}(E)$ est fini avec :

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{card}(E)}$$