

Devoir Surveillé 1 - CORRECTION

Durée : 2 heures
Calculatrice interdite

Exercice 0.1. Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels puis en déterminer une base et la dimension :

1. $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x - y + 2z - t = 0 \text{ et } y + z - t = 0\}$.
2. $B = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(1) = 0\}$.

1. On a : $\begin{cases} 2x - y + 2z - t = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x + 2y \\ t = y + z = 3y - 2x \end{cases}$ Grâce

à ce calcul on a : $A = \{(x, y, -2x + 2y, -2x + 3y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 0, -2, -2), (0, 1, 2, 3))$.

Donc A est un espace vectoriel et la famille $\mathcal{B} = ((1, 0, -2, -2), (0, 1, 2, 3))$ est une famille génératrice de A .

Les deux vecteurs de la famille $\mathcal{B}$ ne sont visiblement pas proportionnels donc la famille $\mathcal{B}$ est libre.

La famille $\mathcal{B}$ est donc une base de A et $\dim(A) = 2$.

2. Un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à 3 peut s'écrire $P = \sum_{k=0}^3 a_k X^k$. $P(1) = 0$ équivaut à $a_0 = -\sum_{k=1}^3 a_k$ Donc :

$$B = \left\{ \sum_{k=1}^3 a_k (X^k - 1) / a_k \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left((X^k - 1)_{1 \leq k \leq 3} \right)$$

Donc B est un espace vectoriel et la famille $\mathcal{B} = ((X^k - 1)_{1 \leq k \leq n})$ est génératrice de B . De plus, c'est une famille de polynômes échelonnée en degrés donc elle est libre.

Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de B et $\dim(B) = n$.

Exercice 0.2. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Expliciter la matrice D définie par $A = PDP^{-1}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. Expliciter alors A^n .

1. Utilisons le pivot de Gauss : P est bien inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. On a $A = PDP^{-1} \Leftrightarrow D = P^{-1}AP$

$$\text{Or } P^{-1}A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix} \text{ donc } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n) : A^n = PD^nP^{-1}$ est vraie pour tout entier n .

Pour $n = 0$: d'une part $A^0 = I$ et d'autre part $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est bien vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a alors :

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est alors vraie.

Grâce au principe de récurrence on a démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$

4. Comme D est une matrice diagonale on a $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$.

Donc on peut en déduire :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} & 0 \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^{n+1} & 0 \\ -2^n + 5^n & -2^{n+1} + 2 \times 5^n & 5^n \end{pmatrix}$$

Exercice 0.3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer trois réels a_0, a_1 et a_2 tels que :

$$a_0I_2 + a_1A + a_2A^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

On dit que le polynôme $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ est un polynôme annulateur de A .

2. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de I_2 et A .

3. Pour tout entier $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P .

En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On remarque que $A^2 = 5A - 6I_2$, donc le polynôme

$$P = X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$$

est annulateur de A .

2. Puisque $A(5I_2 - A) = 6I_2$, on a :

$$A \times \frac{1}{6} (5I_2 - A) = \frac{1}{6} (5I_2 - A) \times A = I_2$$

ce qui montre que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{6} (5I_2 - A)$.

3. Soit $n \geq 2$.

Notons Q le quotient et R le reste du polynôme X^n dans la division euclidienne par P .

Puisque $\deg(P) = 2$, on a :

$$X^n = PQ + R, \quad \deg(R) \leq 1$$

Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $R = aX + b$.

D'où l'égalité polynomiale :

$$X^n = P(X)Q(X) + aX + b = (X - 2)(X - 3)Q(X) + aX + b$$

En évaluant successivement en $X = 2$ et $X = 3$, on obtient $\begin{cases} 2a + b = 2^n \\ 3a + b = 3^n \end{cases}$,

d'où $a = 3^n - 2^n$ et $b = 3 \times 2^n - 2 \times 3^n$.

Finalement, en calculant le polynôme en la matrice A , on obtient :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n &= P(A)Q(A) + aA + bI_2 \\ &= 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} + aA + bI_2 \\ &= (3^n - 2^n)A + (3 \times 2^n - 2 \times 3^n)I_2 \end{aligned}$$

Exercice 0.4. En utilisant la formule du binôme, calculer les puissances de

la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Indication : on pourra décomposer A en somme d'une matrice diagonale D et d'une matrice triangulaire supérieure N pour laquelle $N^3 = 0_3$.

On a $A = I_3 + N$, avec $N = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On remarque que $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ Vu que N et I_3 commutent, on peut utiliser la formule du binôme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = (I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k$$

Puisque $N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ pour tout $k \geq 3$, on a :

$$\forall n \geq 2, \quad A^n = \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} N^k = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3n & n(4-3n) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie que cette formule reste vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ et on conclut que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & -3n & n(4-3n) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$