

Chap.5 : Réduction des endomorphismes et des matrices

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ finie.

On rappelle que id_E désigne l'endomorphisme identité de E et I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

1.1 Valeurs propres, vecteurs propres

Définition 1.1. • Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de l'endomorphisme f si, et seulement s'il existe un vecteur $\vec{u} \in E$ tel que :

$$\begin{cases} \vec{u} \neq \vec{0}_E \\ f(\vec{u}) = \lambda \vec{u} \end{cases}$$

Un vecteur $\vec{u}$ vérifiant ces deux critères est appelé un **vecteur propre** de f associé à la valeur propre λ .

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit qu'un scalaire λ est une **valeur propre** de la matrice A si, et seulement s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que :

$$\begin{cases} X \neq 0 \\ AX = \lambda X \end{cases}$$

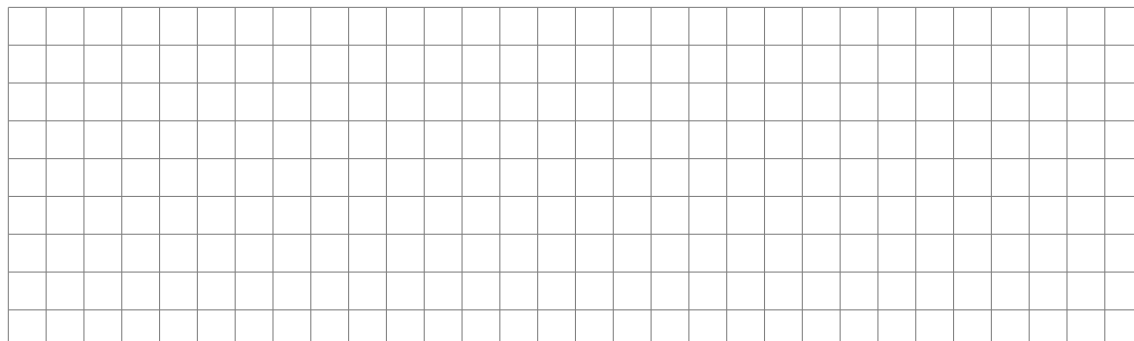
Un vecteur colonne X vérifiant ces deux critères est appelé un **vecteur propre** de A associé à la valeur propre λ .

- L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice est appelé spectre et est noté $\text{sp}(f)$ ou $\text{sp}(A)$.

Méthode 1.2. Pour montrer qu'un vecteur $\vec{u}$ (ou X) donné est un vecteur propre de f (ou de A) on montre que :

1. $\vec{u} \neq 0$ (ou $X \neq 0$)
2. $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ (ou $AX = \lambda X$), avec $\lambda \in \mathbb{K}$

Application 1.3. Soient $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que X est un vecteur propre de A et déterminer la valeur propre associée.

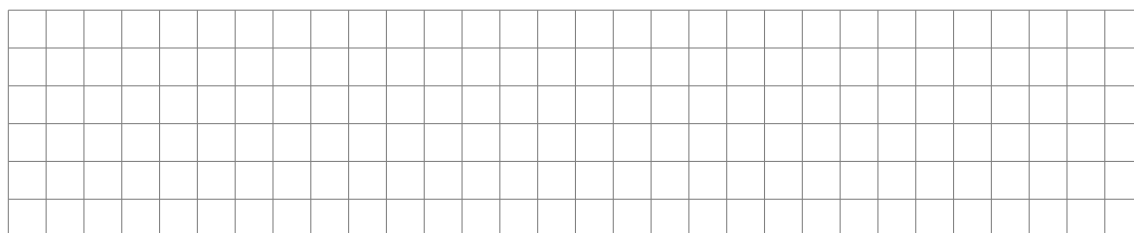


Application 1.4. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par :

$$f(P) = (X - 1)P' + P.$$

On pose $R(X) = (X - 1)^2$.

Montrer que R est un vecteur propre de f .



1.2 Sous-espaces propres

Théorème 1.5. Définition

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de f . On pose :

$$E_\lambda(f) = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}\} = \text{Ker}(\lambda \text{id}_E - f) = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$$

$E_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de E appelé **sous-espace propre de f associé à λ** .

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A . On pose :

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / AX = \lambda X\} = \text{Ker}(\lambda I_n - A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$$

$E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ appelé **sous-espace propre de A associé à λ**

Remarque 1.6. Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est l'ensemble de tous les vecteurs propres associés à la valeur propre λ , plus le vecteur nul. S'il n'y a pas de risque de confusion on pourra noter E_λ (à éviter, sauf si l'énoncé vous l'impose).

Méthode 1.7. Il est important, pour tout ce chapitre, de bien savoir déterminer une base d'un sous-espace propre d'un endomorphisme ou d'une matrice donnée. Pour cela il suffit de revenir à la définition d'un sous-espace propre :

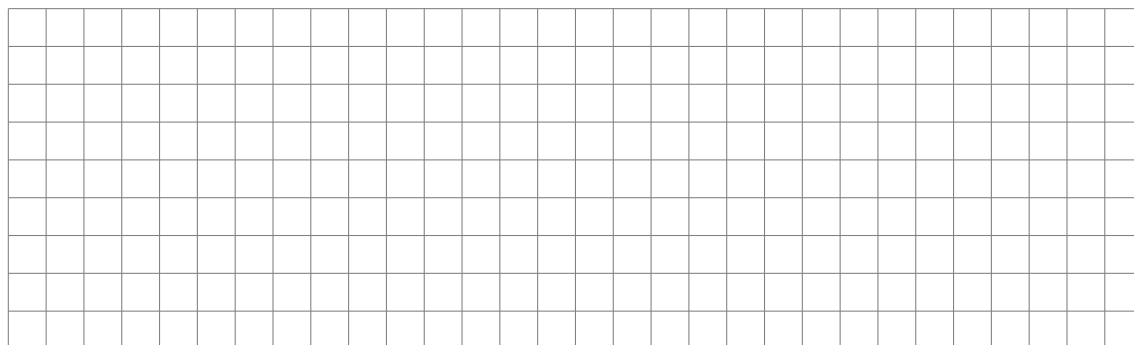
E_λ est l'ensemble des solutions de l'équation $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ ou de l'équation $AX = \lambda X$.

Application 1.8. Reprenons l'endomorphisme f de l'application précédente :

$$f(P) = (X - 1)P' + P.$$

Nous avons prouvé que 3 est une valeur propre de f .

Déterminer une base de $E_3(f)$, c'est-à-dire le sous-espace propre associé à la valeur propre 3.



1.3 Polynôme caractéristique

Voici l'outil qui va, très souvent, nous permettre de calculer les valeurs propres d'une matrice ou d'un endomorphisme.

Définition 1.9. • Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **polynôme caractéristique** de f , et on note χ_f , le polynôme suivant :

$$\chi_f(\lambda) = \det(\lambda \text{id}_E - f)$$

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A , et on note χ_A , le polynôme suivant :

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

Remarque 1.10. • Sauf si l'énoncé fait une demande autre, vous devez toujours noter χ le polynôme caractéristique.

- Cette définition contient un point que l'on ne démontrera pas ici : le fait que $\det(\lambda \text{id}_E - f)$ et $\det(\lambda I_n - A)$ sont bien des polynômes !

[illegible]
$$\chi_f = \chi_A$$
[illegible]

Application 1.14. Reprenons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par

Déterminer son polynôme caractéristique.

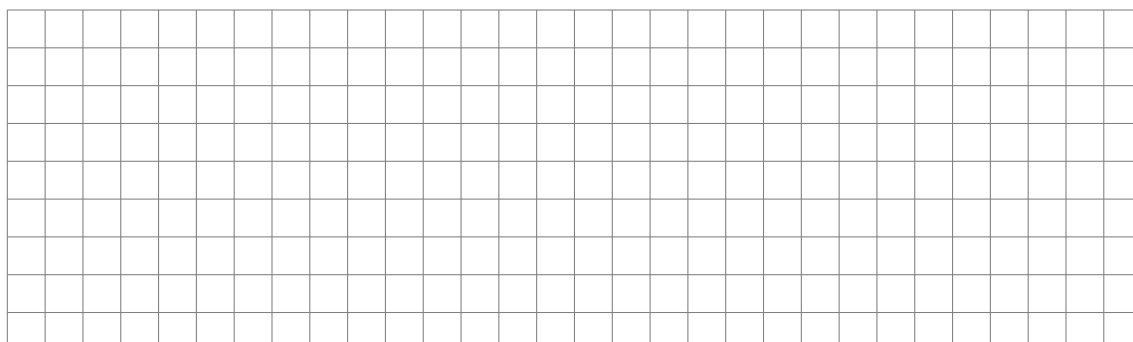


Proposition 1.15. *Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme de E ($\dim(E) = n$) ou d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un polynôme de degré n et de coefficient dominant égal à 1 .*

Proposition 1.16. • *Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.*

- *Une matrice et sa transposée ont le même polynôme caractéristique.*

Preuve :

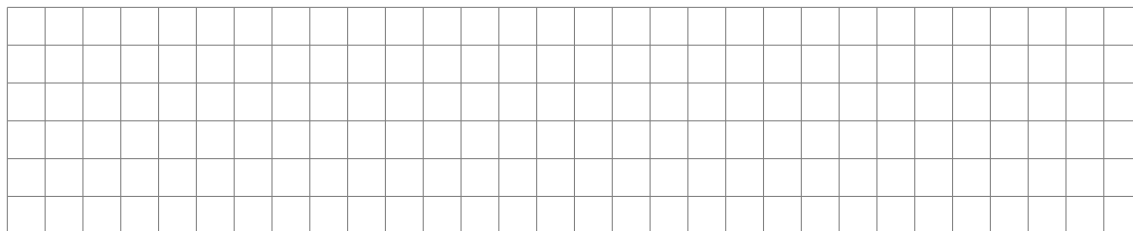


Théorème 1.17. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ (respectivement $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f (respectivement A) si, et seulement si, c'est une racine de χ_f (respectivement χ_A)*

Méthode 1.18. *Pour trouver **toutes** les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice il suffit de trouver toutes les racines du polynôme caractéristique.*

Attention : *il faut bien regarder si on cherche les racines dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

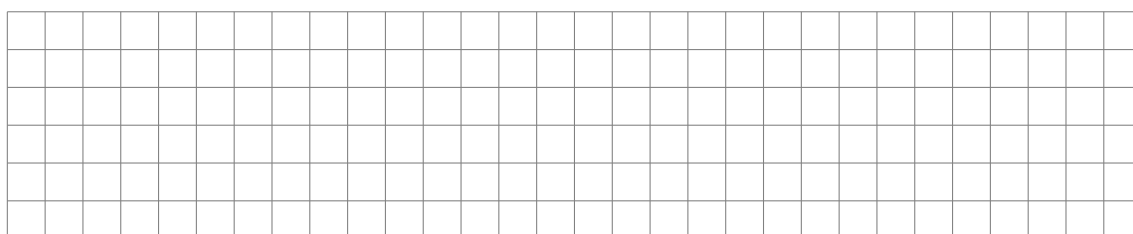
Application 1.19. *Trouver les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.*



Application 1.20. Reprenons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par

$$f(P) = (X - 1)P' + P.$$

Déterminer son spectre.



1.4 Ordre de multiplicité d'une valeur propre

Définition 1.21. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, χ_f son polynôme caractéristique et λ une valeur propre.

On appelle **ordre de multiplicité** de λ son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_f .

On le note $m_f(\lambda)$ ou $m(\lambda)$.

Cette définition s'adapte aussi pour les valeurs propres d'une matrice.

Exemple 1.22. • Pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, 1 est une valeur

propre de multiplicité 1 et -1 est une valeur propre de multiplicité 2.

On dit que 1 est une **valeur propre simple** et -1 est une **valeur propre double**.

- Pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par $f(P) = (X - 1)P' + P$, toutes les valeurs propres ont un ordre de multiplicité égal à 1.

On dit que 1, 2 et 3 sont des valeurs propres simples.

2 Les propriétés utiles des éléments propres

2.1 Autour des valeurs propres

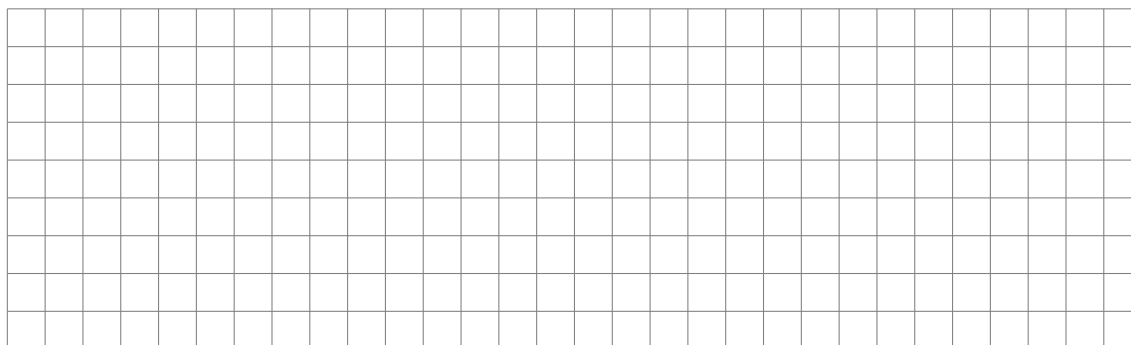
Théorème 2.1. • Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

$\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f si, et seulement si, $\text{Id}_E - f$ n'est

pas injectif.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si, et seulement si, $\lambda I_n - A$ n'est pas inversible.

Preuve :



Remarque 2.2. • Comme nous sommes en dimension finie et que nous travaillons uniquement avec des endomorphismes, injectif et bijectif sont équivalents.

- On peut bien évidemment travailler aussi avec $f - \lambda \text{id}_E$ et $A - \lambda I_n$.

Proposition 2.3. • Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. 0 est une valeur propre de f si, et seulement si, f n'est pas injective.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. 0 est une valeur propre de A si, et seulement si, A n'est pas inversible.

Remarque 2.4. Cette propriété est très utilisée dans les problèmes et exercices car il présente un lien entre le caractère bijectif d'un endomorphisme et une de ses valeurs propres : 0 (ou entre le caractère inversible d'une matrice et la valeur propre 0).

Proposition 2.5. • Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n admet au plus n valeurs propres distinctes.

- Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet au plus n valeurs propres distinctes.

Proposition 2.6. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base de E et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors :

- λ est une valeur propre de f si, et seulement si, λ est une valeur propre de A .
- $\vec{u} \in E$ est un vecteur propre de f associé à λ si, et seulement si, la matrice colonne $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u})$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

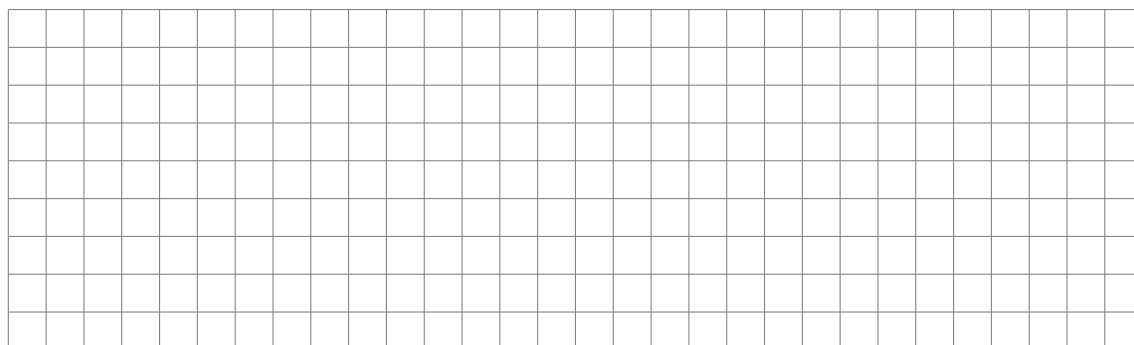
Remarque 2.7. Chercher les valeurs propres d'un endomorphisme ou de sa matrice dans une base donnée revient au même. **Attention !!!** les valeurs propres de A et f sont les mêmes mais il ne faut pas confondre les vecteurs propres de f (qui sont des éléments de E) et les vecteurs propres de A (qui sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$)

2.2 Autour des vecteurs propres

Proposition 2.8. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\vec{u} \in E$ tel que $\vec{u} \neq 0$.

$\vec{u}$ est un vecteur propre de f si, et seulement si, la droite vectorielle $\text{Vect}(\vec{u})$ est stable par f .

Preuve :



Théorème 2.9. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de f et $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ des vecteurs propres respectivement associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Alors $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est une famille libre de E

Proposition 2.10. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont n valeurs propres distinctes et si $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ sont des vecteurs propres associés à ces valeurs propres alors la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une base de E .

On dit que c'est une **base de vecteurs propres**.

Preuve :

le théorème précédent nous dit que la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est libre et de plus c'est une famille de n vecteurs dans l'espace vectoriel E qui est de dimension n .

Toutes les propriétés précédentes peuvent aussi être énoncées pour des matrices. En particulier :

Proposition 2.11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

- Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes de A et $X_1, \dots, X_p$ des vecteurs propres colonnes associés, alors $(X_1, \dots, X_p)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

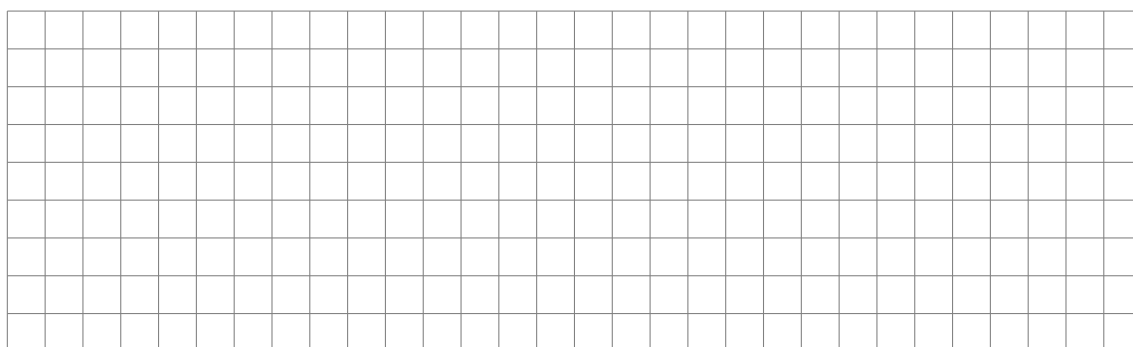
- Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des valeurs propres distinctes de A et $X_1, \dots, X_n$ des vecteurs propres colonnes associés, alors $(X_1, \dots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

2.3 Autour des sous-espaces propres

Théorème 2.12. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de f .

Alors les sous-espaces propres associés à ces deux valeurs propres sont en somme directe.

Preuve :



Proposition 2.13. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de f .

Alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(f), \dots, E_{\lambda_p}(f)$ sont en somme directe.

ATTENTION!!! les sous-espaces propres sont en somme directe mais ne sont pas toujours supplémentaires.

Théorème 2.14. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre dont l'ordre de multiplicité est $m(\lambda)$.

Alors on a l'encadrement suivant :

$$1 \leq \dim(E_\lambda(f)) \leq m(\lambda) \leq n$$

où $E_\lambda(f)$ désigne le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ .

Remarque 2.15. • Les trois résultats précédents restent évidemment valables pour les matrices.

- Pour une valeur propre de multiplicité égale à 1 (valeur propre simple), on a forcément $\dim(E_\lambda) = 1$!

Exemple 2.16. • On reprend encore la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

On peut donc dire que $1 \leq \dim(E_1(A)) \leq 1$ donc le sous-espace propre

associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.

Pour la valeur propre -1 on peut, avec ce théorème uniquement affirmer que $1 \leq \dim(E_{-1}(A)) \leq 2$ (on peut évidemment trouver cette dimension en déterminant une base de $E_{-1}(A)$).

- Pour l'endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ défini par $f(P) = (X-1)P' + P$, les trois valeurs propres (1, 2 et 3) ont pour ordre de multiplicité 1, donc tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.

3 Matrice ou endomorphisme diagonalisable

3.1 Définition

Définition 3.1. • Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **diagonalisable** si, et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est une **matrice diagonalisable** si, et seulement si il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

Deux problèmes se posent donc :

- comment savoir si une matrice ou un endomorphisme est diagonalisable ?
- lorsqu'une matrice est diagonalisable comment construire des matrices P et D telles que P est inversible, D diagonale et $A = PDP^{-1}$, ou lorsqu'un endomorphisme est diagonalisable comment construire une base dans laquelle la matrice de f est diagonale ?

3.2 Les théorèmes de diagonalisation

Le but de cette partie est donc de savoir répondre à la question : " f (ou A) est-il diagonalisable" ? .

Théorème 3.2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ (respectivement $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). On note $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ toutes les valeurs propres distinctes de f (respectivement de A). Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f (respectivement A) est diagonalisable.
2. $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}$
3. La somme des dimensions des sous-espaces propres de f (respectivement A) vaut n :

$$\sum_{i=1}^k \dim(E_{\lambda_i}) = n$$

4. Le polynôme caractéristique de f (respectivement de A) est scindé et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre associé.

Ce théorème permettra toujours de répondre à la question " f (ou A) est-il diagonalisable ?".

Suivant le contexte de l'exercice il faudra choisir de vérifier l'un des points 2,3 ou 4.

Il existe un cas particulier qui permet de répondre à cette même question plus rapidement :

Théorème 3.3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ (respectivement $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) :

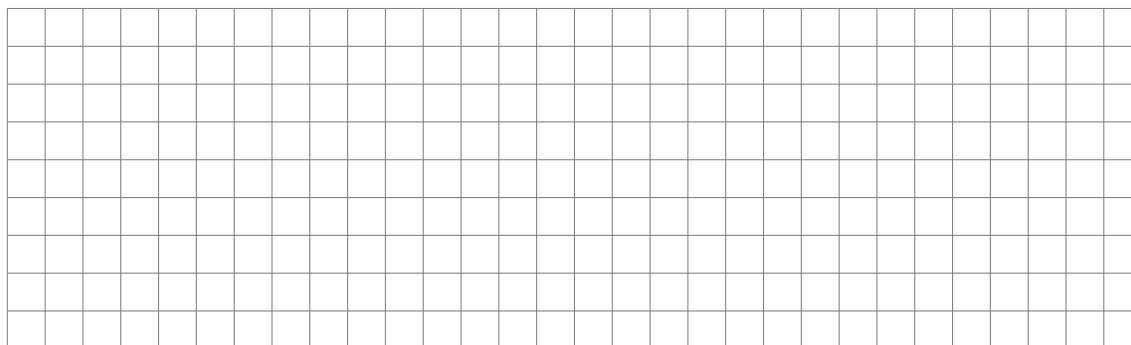
- Si f (respectivement A) admet n valeurs propres distinctes alors f (respectivement A) est diagonalisable.
- Si χ_f (respectivement χ_A) est scindé à racines simples alors f (respectivement A) est diagonalisable.

Attention!!! Dans ce théorème les phrases ne sont pas des équivalences. La réciproque de toutes ces phrases est en général fausse.

Méthode 3.4. Si aucun travail n'a été fait avant, voici la marche à suivre pour savoir si A ou f est diagonalisable :

1. On détermine les valeurs propres en calculant les racines du polynôme caractéristique.
2. Ensuite trois situations possibles :
 - Si le polynôme caractéristique n'est pas scindé, alors A ou f n'est pas diagonalisable (dans $\mathbb{C}$ cette situation n'est pas possible).
 - Si χ_f ou χ_A est scindé à racines simples, alors f ou A est diagonalisable. ou : si toutes les valeurs propres sont des valeurs propres simples alors A ou f est diagonalisable.
 - Si certaines valeurs propres sont multiples, on détermine la dimension de chacun des sous-espaces propres et on utilise le point 3 ou 4 du théorème précédent.

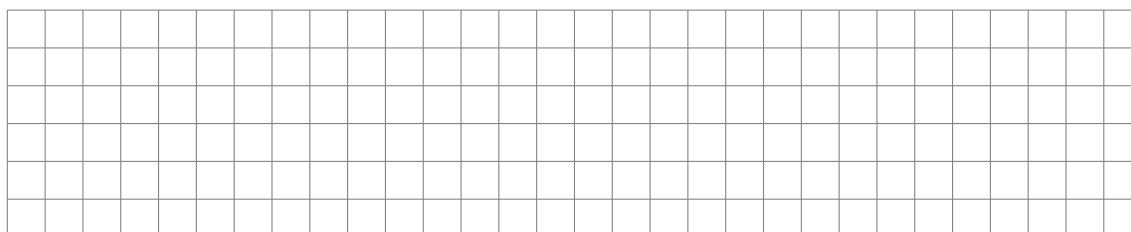
Application 3.5. Reprenons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?



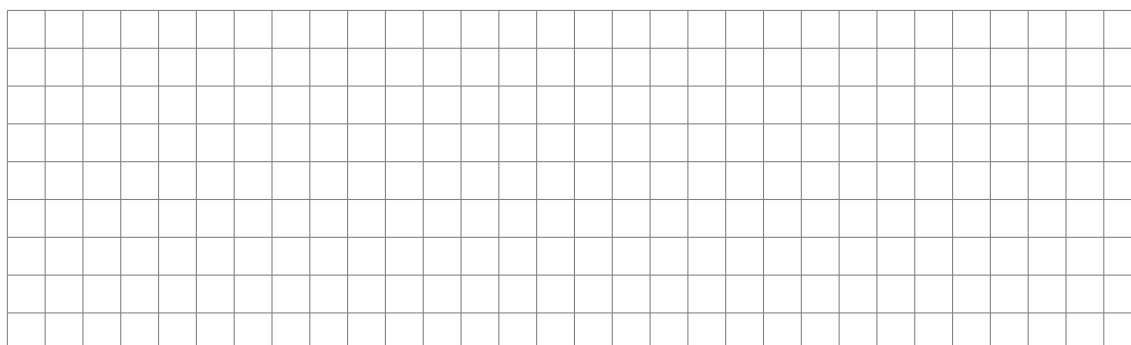
Application 3.6. Reprenons l'endomorphisme :

$$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X]), \quad f(P) = (X - 1)P' + P$$

f est-il diagonalisable ?



Application 3.7. La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?



Proposition 3.8. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base quelconque de E . *f* est diagonalisable si, et seulement si, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonalisable.

3.3 Comment diagonaliser une matrice ?

Le but de cette partie est, étant donné une matrice A que l'on sait diagonalisable, de trouver une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que :

$$A = PDP^{-1}.$$

Proposition 3.9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable et $\text{sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ l'ensemble de ses valeurs propres.

On note $\mathcal{B}_1$ une base de $E_{\lambda_1}(A)$, ..., $\mathcal{B}_p$ une base de $E_{\lambda_p}(A)$.

- La réunion de toutes ces bases forme une base, que l'on note $\mathcal{B}$, de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On dit que $\mathcal{B}$ est une **base de vecteurs propres** de A .
- En posant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à la base $\mathcal{B}$ et D la matrice diagonale contenant les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ comptées chacune avec leur ordre de multiplicité, alors on a :

$$A = PDP^{-1}$$

Méthode 3.10. Diagonaliser une matrice signifie trouver une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

Voici un résumé de tout ce que nous avons construit jusqu'à présent (Attention dans un problème de concours il faudra s'adapter à l'ordre des questions !) :

1. Trouver les valeurs propres de A : le plus souvent on calcule χ_A et on résout $\chi_A(\lambda) = 0$ (attention à bien regarder l'énoncé de l'exercice pour savoir si on travaille dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
2. A est-elle diagonalisable ? Quelques pistes pour répondre :
 - si χ_A n'est pas scindé, A n'est pas diagonalisable ; si χ_A est scindé à racines simples, alors A est diagonalisable ; ou : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si A admet n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable ;
 - si χ_A est scindé mais que certaines racines sont multiples, on cherche une base de chaque sous-espace propre et A est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut n .
3. Si A est diagonalisable, on construit P et D :
 si cela n'a pas été fait avant il faut trouver une base de chacun des sous-espaces propres.
 La réunion de toutes ces bases donne une base de vecteurs propres de A .
 On construit alors P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à la base de vecteurs propres et dans la matrice diagonale D

Attention !!! Les bases des sous-espaces propres ne sont pas uniques donc la matrice P n'est pas unique et la matrice D n'est pas unique non plus car elle dépend de l'ordre des vecteurs propres utilisés pour construire la matrice P .

Si oui, la diagonaliser.

[illegible]

Dans cette partie, on souhaite, étant donné un endomorphisme f diagonalisable, construire une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

f est diagonalisable si, et seulement si il existe une base de E formée de vecteurs propres de f .

$\Rightarrow$: Supposons que f est diagonalisable.

On note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$.

Et comme $\vec{u}_i$ est un vecteur d'une base il n'est pas nul.

Ainsi $\vec{u}_i$ est un vecteur propre de f et donc la base $\mathcal{B}$ est une base formée de vecteurs propres.

$\Leftarrow$: Supposons qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f . Notons $\mathcal{C} = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$ cette base de vecteurs propres et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées (elle ne sont pas forcément distinctes).

On a donc, pour tout $1 \leq i \leq n$, $f(\vec{w}_i) = \lambda_i \vec{w}_i$ et donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ceci signifie que f est diagonalisable.

Proposition 3.13. Soit f un endomorphisme de E que l'on sait diagonalisable et $\text{sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ l'ensemble de ses valeurs.

On note $\mathcal{B}_1$ une base de $E_{\lambda_1}(f)$, $\dots$, $\mathcal{B}_p$ une base de $E_{\lambda_p}(f)$.

Alors la réunion de toutes ces bases forme une base $\mathcal{B}$ de E .

De plus, cette base $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres de f et donc la matrice de f dans cette base est diagonale.

Méthode 3.14. Diagonaliser un endomorphisme signifie trouver une base dans laquelle la matrice de cet endomorphisme est diagonale et donner cette matrice diagonale.

Voici un résumé de tout ce que nous avons construit jusqu'à présent (Attention dans un problème de concours il faudra s'adapter à l'ordre des questions !) :

1. Trouver les valeurs propres de f : le plus souvent on calcule χ_f et on résout $\chi_f(\lambda) = 0$ (attention à bien regarder l'énoncé de l'exercice pour savoir si on travaille dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
2. f est-il diagonalisable ? Quelques pistes pour répondre :
 - si χ_f n'est pas scindé, f n'est pas diagonalisable ;
 - si χ_f est scindé à racines simples, alors f est diagonalisable ou : si $\dim(E) = n$ et si f admet n valeurs propres distinctes f est diagonalisable ;
 - si χ_f est scindé mais que certaines racines sont multiples, on cherche une base de chaque sous-espace propre et f est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n .
3. Lorsque f est diagonalisable, on construit une base de vecteurs propres : si ça n'a pas été fait avant il faut trouver une base de chacun des sous-espaces propres.

La réunion de toutes ces bases donne une base de vecteurs propres de f .

La matrice de f relative à la base de vecteurs propres est alors la matrice diagonale contenant les valeurs propres de f sur sa diagonale.

Application 3.15. Diagonaliser l'endomorphisme :

$$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X]), \quad f(P) = (X - 1)P' + P$$



4 Matrice ou endomorphisme trigonalisable

4.1 Définition

Définition 4.1. • Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est une matrice trigonalisable si, et seulement si, il existe une matrice P inversible et une matrice T triangulaire telles que $A = PTP^{-1}$.

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est trigonalisable si, et seulement si, il existe une base de E telle que la matrice de f relative à cette base est triangulaire.

Proposition 4.2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base quelconque de E . f est trigonalisable si, et seulement si, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est trigonalisable.

4.2 Le théorème de trigonalisation

Voici le seul et unique théorème permettant de répondre à la question " f (ou A) est-il trigonalisable ?".

Théorème 4.3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ (respectivement $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) f (respectivement A) est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.

Proposition 4.4. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ toutes les matrices sont trigonalisables et dans un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel tous les endomorphismes sont trigonalisables.

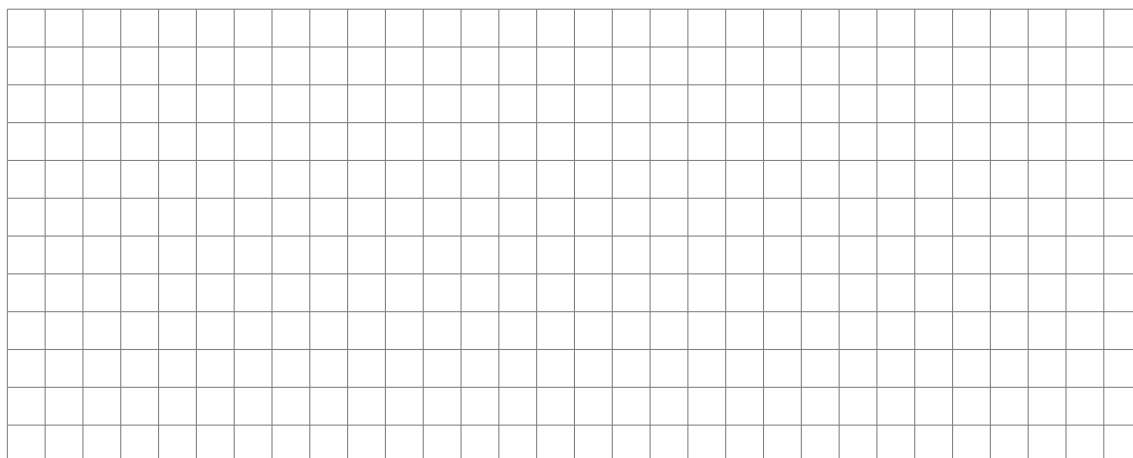
Attention !!! ce n'est pas vrai dans le corps des réels.

Remarque 4.5. *Aucune technique de trigonalisation effective n'est au programme. L'énoncé devra guider l'étudiant pour trigonaliser une matrice ou un endomorphisme.*

4.3 Exemple de trigonalisation

Application 4.6. *On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .*

1. Déterminer les valeurs propres de f .
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Trigonalisable ?
3. On pose $\vec{u} = (1, -1, 0)$ et $\vec{v} = (1, 1, 0)$.
 - (a) Déterminer le vecteur $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$, dont la première coordonnée est égale à 1 et tel que $f(\vec{w}) = \vec{v} + \vec{w}$
 - (b) Justifier que $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - (c) Déterminer la matrice T de f dans la base $\mathcal{B}$.
4. Quel est le lien entre la matrice A et la matrice T ?



4.4 Retour sur le polynôme caractéristique

Proposition 4.7. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si le polynôme caractéristique de A est scindé alors :*

- la somme des valeurs propres (comptées avec leur ordre de multiplicité) est égale à $\text{tr}(A)$
- le produit des valeurs propres (comptées avec leur ordre de multiplicité) est égal à $\det(A)$.

Preuve :



Remarque 4.8. • Si on travaille dans le corps des complexes le polynôme caractéristique est forcément scindé !

- Cette propriété vous donne un moyen de vérifier la cohérence de vos calculs : comparer la somme des valeurs propres que vous avez calculé avec la valeur de la trace de A et comparer le produit des valeurs propres avec la valeur de $\det(A)$.

5 Applications de la réduction

5.1 Puissances de matrice

Pour une matrice A quelconque, il n'existe pas de formule générale permettant d'explicitier A^k .

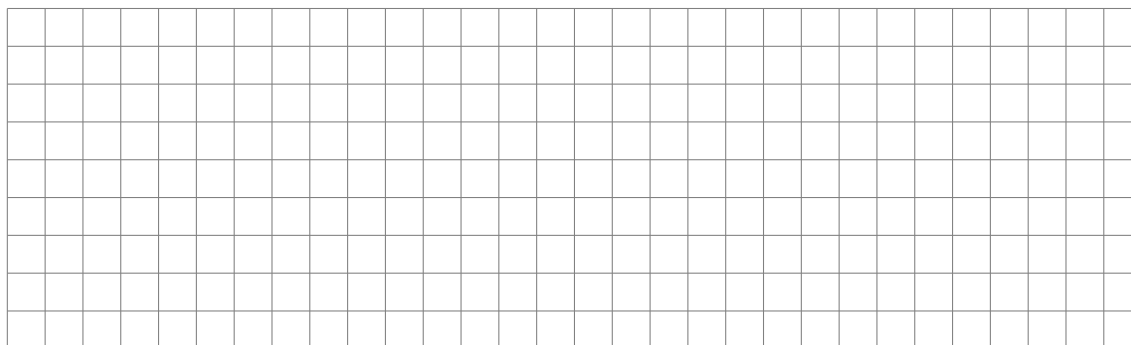
Nous allons voir ici une méthode pour calculer A^k dans le cas d'une matrice diagonalisable et une méthode dans le cas d'une matrice trigonalisable.

Ces deux méthodes sont basées sur la propriété ci-dessous, qu'il est souvent demandé de redémontrer dans les sujets de concours. La démonstration est donc à connaître par cœur.

Proposition 5.1. Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P une matrice inversible telle que $A = PBP^{-1}$, alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad A^k = PB^kP^{-1}$$

Preuve :



5.1.1 Matrices diagonalisables

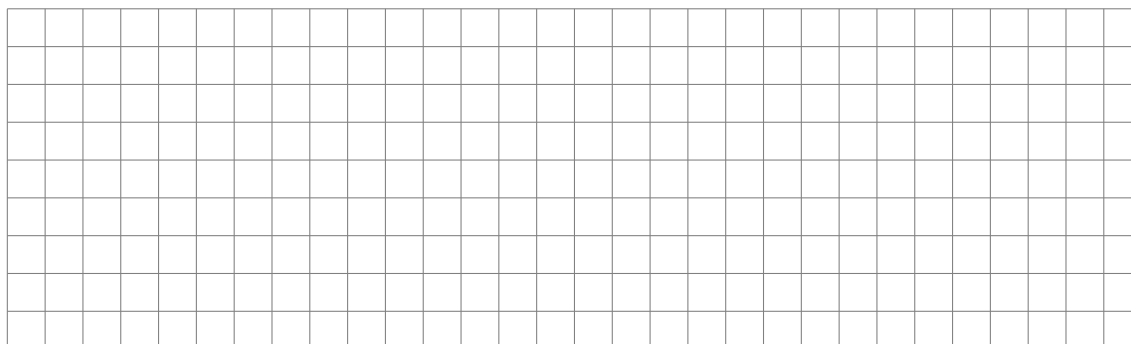
Proposition 5.2. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale.

On note $d_1, \dots, d_n$ les éléments diagonaux de D .

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^k \end{pmatrix}.$$

Application 5.3. Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$ si $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.



5.1.2 Matrices trigonalisables

Une matrice triangulaire T peut s'écrire $T = D + N$ avec D une matrice diagonale et N une matrice triangulaire dont la diagonale ne contient que

des 0 (par exemple $N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$).

On remarquera alors qu'il existe un entier p tel que $N^p = 0$.

Si les matrices D et N commutent ($DN = ND$), on utilisera la formule du binôme (rappelée ci-dessous) pour calculer T^k .

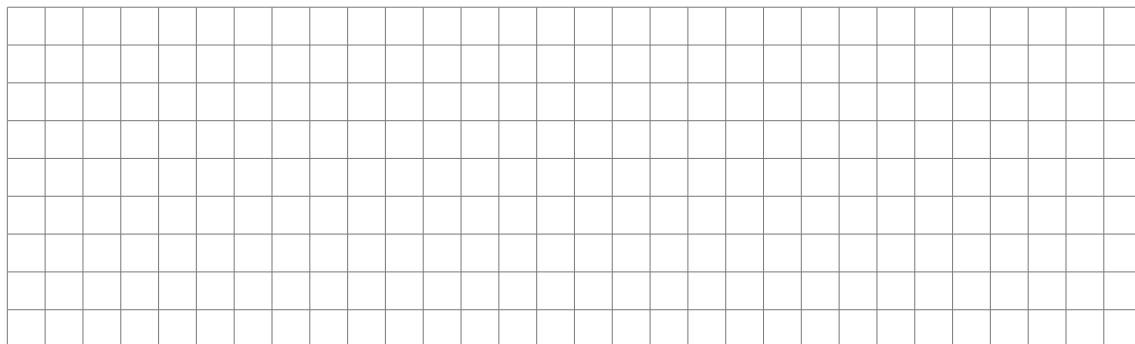
Attention!!! D et N ne commutent pas toujours.

Proposition 5.4. Formule du binôme de Newton

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent ($AB = BA$). Alors pour tout entier k :

$$(A + B)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i B^{k-i}$$

Application 5.5. Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$ pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.



5.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 5.6. On dit qu'une suite u est définie par une **relation homogène de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants** lorsqu'il existe deux réels a et b tels que $b \neq 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On appelle **équation caractéristique associée** à cette suite l'équation suivante :

$$r^2 - ar - b = 0.$$

Théorème 5.7. Théorème 11 On considère une suite u définie par une relation homogène de récurrence linéaire d'ordre 2.

- Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 alors il existe $(A_1, A_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n$$

- Si l'équation caractéristique n'admet qu'une solution réelle r_0 alors il existe $(A_1, A_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (A_1 + A_2 n) r_0^n$$

- Si l'équation caractéristique admet deux solutions complexes non réelles $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ alors il existe $(A_1, A_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \rho^n (A_1 \cos(n\theta) + A_2 \sin(n\theta)).$$

On détermine les valeurs de A_1 et A_2 grâce à u_0 et u_1 .

Preuve :

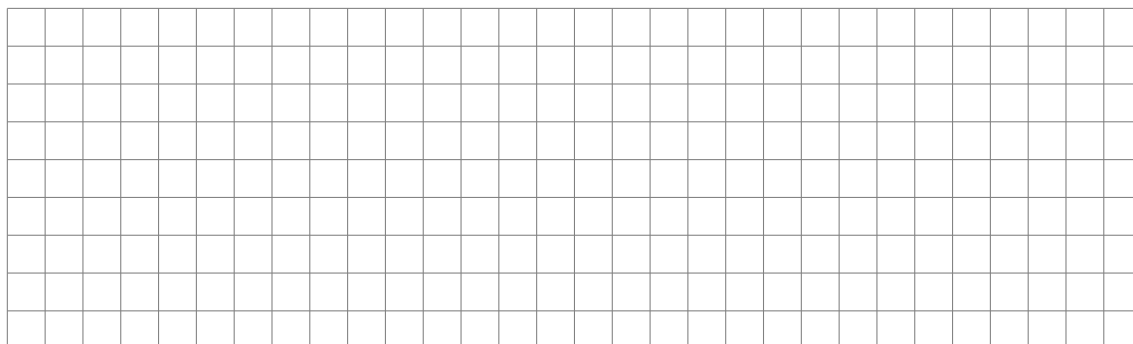


Remarque 5.8. L'ensemble des suites réelles qui vérifient la relation $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ est donc, dans chaque cas, un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2 donc on connaît une base.

Application 5.9. On considère la suite u définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n \\ u_0 = u_1 = 1 \end{cases}$$

Calculer le terme général de la suite en fonction de n .



6 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

6.1 La théorie

Définition 6.1. On appelle **système différentiel linéaire à coefficients constants** un système d'équations du type :

$$(S) : \begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

où les fonctions x_i sont les inconnues et les coefficients a_{ij} sont des éléments de $\mathbb{K}$ fixés.

Notations : Lorsqu'on rencontre un tel système, on pose :

$$A = (a_{ij})_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket} \quad \text{et} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

On définit la dérivée de la fonction vectorielle X par $X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$.

Grâce à ces notations le système différentiel (S) s'écrit alors : $X'(t) = AX(t)$.

Remarque 6.2. On peut aussi définir les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants, non homogènes.

Ils s'écrivent sous forme matricielle $X'(t) = AX(t) + b(t)$ avec $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Pour les résoudre, on procède comme sur les équations différentielles en ajoutant une solution particulière aux solutions du système homogène.

Exemple 6.3. $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) + t \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) + e^t \end{cases}$ est un système différentiel linéaire à coefficients constants.

On peut l'écrire sous forme matricielle $X' = AX + b(t)$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Définition 6.4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle **solution sur I du**

système (S) toute fonction vectorielle $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ telle que

toutes les fonctions x_i sont dérivables sur I et telle que :

$$\forall t \in I, \quad X'(t) = AX(t)$$

Théorème 6.5. Problème de Cauchy

Soient $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Le problème de Cauchy vectoriel suivant : $\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$, admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Théorème 6.6. Structure de l'ensemble des solutions

L'ensemble $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ des solutions sur $\mathbb{R}$ du système (S) est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

6.2 Pratique de la résolution

Méthode 6.7. • Si la matrice A est diagonale (on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses éléments diagonaux) alors le système (S) s'écrit :

$$\begin{cases} x'_1(t) = \lambda_1 x_1(t) \\ x'_2(t) = \lambda_2 x_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = \lambda_n x_n(t) \end{cases}$$

On a donc n équations différentielles d'ordre 1 à coefficients constants indépendantes à résoudre : $x_i(t) = C_i e^{\lambda_i t}$.

- Si la matrice A est triangulaire supérieure on a alors le système suivant :

$$\begin{cases} x'_1(t) = \lambda_1 x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) \\ x'_2(t) = \lambda_2 x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ x'_{n-1}(t) = \lambda_{n-1}x_{n-1}(t) + a_{n-1,n}x_n(t) \\ x'_n(t) = \lambda_n x_n(t) \end{cases}$$

On résout ce système par remontée, en commençant par la dernière équation qui ne dépend que x_n .

- Si la matrice A est quelconque :
 1. On commence par réduire la matrice A . Dans l'idéal on diagonalise et sinon on trigonalise (toujours possible dans $\mathbb{C}$). On a donc une matrice diagonale ou triangulaire et une matrice P inversible telles que $A = P\Delta P^{-1}$.

2. On fait alors un changement de fonction inconnue : $X(t) = PY(t)$. Le système (S) devient :

$$X'(t) = AX(t) \Leftrightarrow PY' = P\Delta P^{-1}PY \Leftrightarrow PY' = P\Delta Y \Leftrightarrow Y' = \Delta Y$$

Y est donc solution d'un système différentiel diagonal ou triangulaire.

3. Une fois que l'on a trouvé Y , on revient à X par la relation :

$$X = PY.$$

Application 6.8. Résoudre le système différentiel suivant :

$$(S) \begin{cases} x' = 4x + y + z \\ y' = x + 4y + z \\ z' = x + y + 4z \end{cases}$$



Application 6.9. Résoudre le système différentiel (S) $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$.



6.3 Comportement asymptotique des solutions

Dans cette partie on suppose que la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

On note D la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et P la matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

On notera aussi $d_1, \dots, d_n$ les éléments de la diagonale de D , c'est-à-dire les valeurs propres de A .

Proposition 6.10. • Si $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \operatorname{Re}(d_k) < 0$, alors :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = 0.$$

On dit que le système est **asymptotiquement stable**.

- Si $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \operatorname{Re}(d_k) \leq 0$, alors pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la fonction x_i est bornée.

On dit que le système est **stable**.

- Si $\exists k_0 \in \{1, \dots, n\}, \operatorname{Re}(d_{k_0}) > 0$, alors il existe au moins une solution $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$ dont une composante tend vers $\pm\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$.

On dit que le système est **instable**.

Exemple 6.11. Reprenons les deux dernières applications.

- Dans l'avant-dernière, si par exemple K_1 et K_2 sont strictement positifs, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$.

Le système est dit instable.

- Dans la dernière, on a :

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t}(2A \cos(t) - 2B \sin(t)) \text{ et} \\ y(t) &= e^{-t}(-2A \sin(t) - 2B \cos(t)). \end{aligned}$$

Ainsi, $|x(t)| \leq e^{-t}(2|A| + 2|B|)$ et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$. De même pour y .

Ce système est donc asymptotiquement stable.

6.4 Équations différentielles scalaires d'ordre n à coefficients constants

Définition 6.12. On appelle **équation différentielle scalaire linéaire d'ordre n à coefficients constants** ($n \in \mathbb{N}^*$) une équation du type :

$$(E) : x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1x'(t) + a_0x(t) = b(t)$$

où $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ sont des éléments de $\mathbb{K}$, b est une fonction continue de I dans $\mathbb{K}$, et la fonction inconnue est $x : I \rightarrow \mathbb{K}$.

L'équation :

$$(H) : y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

s'appelle **l'équation homogène associée** à l'équation (E) .

Méthode 6.13. Pour résoudre une équation différentielle homogène d'ordre n à coefficients constants :

1. On pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Avec ces notations, l'équation (H) devient $X'(t) = AX(t)$.

2. On utilise la technique de résolution des systèmes différentiels à coefficients constant présenté dans la partie VI 2 .

Attention !!! : si à la fin de la résolution du système les calculs de $PY(t)$ sont longs, on pourra remarquer que dans $X(t)$ seul le premier élément nous intéresse !!!

3. Enfin, pour avoir les solutions de (E), il faut ajouter aux solutions de (H) une solution particulière de l'équation (E).

Application 6.14. Résoudre l'équation différentielle :

$$x^{(3)}(t) - 2x''(t) - x'(t) + 2x(t) = 0.$$

