Pour le 22 octobre 2021
Devoir-Maison 6 - CORRECTION

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où k est une constante réelle ou complexe.

1. Quel est le rang de A? Et la dimension de $\mathrm{Ker}(A)$?
   Notons C_1, C_2, C_3, C_4 les colonnes de A. Puisque $C_1 = C_3 = C_4$, on a :
   $$rg(A) = rg\,(C_1, C_2).$$
   En outre, la famille (C_1, C_2) est libre car $C_1 \neq 0$ et C_2 n'est pas colinéaire à C_1, donc $rg(A) = 2$.
   Par le théorème du rang, on en déduit que :
   $$\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 4 - \mathrm{rg}(A) = 2.$$
2. En déduire sans calcul que 0 est valeur propre de A.
   La question précédente montre que $\mathrm{Ker}(A) \neq \{0\}$. Il existe donc $X \in \mathbb{C}^4 \backslash \{0\}$ tel que $AX = 0 = 0X$, c'est-à-dire que 0 est valeur propre de A.
3. Calculer le polynôme caractéristique de A. On le notera $\chi_A(X)$.
   Par définition, $\chi_A(X) = \det\,(XI_4 - A) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ -1 & X-k & -1 & -1 \\ 0 & -1 & X & 0 \\ 0 & -1 & 0 & X \end{vmatrix}$.
   En effectuant la transformation $L_1 \leftarrow L_1 + XL_2$, on obtient :
   $$P_A(X) = \begin{vmatrix} 0 & X(X-k)-1 & -X & -X \\ -1 & X-k & -1 & -1 \\ 0 & -1 & X & 0 \\ 0 & -1 & 0 & X \end{vmatrix}$$
   En développant par rapport à la première colonne, il vient
   $$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X(X-k)-1 & -X & -X \\ -1 & X & 0 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix}$$

On effectue ensuite $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$, et on développe par rapport à la troisième colonne :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X(X-k)-2 & -X & 0 \\ -1 & X & 0 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X(X-k)-2 & -X \\ -1 & X \end{vmatrix}$$

Enfin, on factorise par X dans la deuxième colonne, pour obtenir :

$$\chi_A(X) = X^2 \begin{vmatrix} X(X-k)-2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = X^2 \left(X^2 - kX - 3 \right)$$

4. On suppose que $k \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que A possède trois valeurs propres distinctes.
   Le discriminant du polynôme $X^2 - kX - 3$ vaut $\Delta(k) = k^2 + 12$.
   Puisque k est réel, on a $\Delta(k) > 0$, et donc $X^2 - kX - 3$ possède deux racines réelles distinctes.
   Puisque $\chi_A(X) = X^2 \left(X^2 - kX - 3\right)$, et que 0 n'est pas racine de $X^2 - kX - 3$, on en déduit que $\chi_A(X)$ possède trois racines réelles distinctes, donc que A possède trois valeurs propres.
   (b) En déduire que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ quel que soit $k \in \mathbb{R}$.
   Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$:
   $$\chi_A(X) = X^2 \left(X - \lambda_1\right)\left(X - \lambda_2\right), \text{ avec } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ et } \lambda_1, \lambda_2 \neq 0.$$
   Le sous-espace propre $E_0(A) = \operatorname{Ker}(A)$ est de dimension 2 (montré auparavant).
   Les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(A)$ et $E_{\lambda_2}(A)$ sont nécessairement de dimension 1 car les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont simples (i.e. de multiplicité 1).
   On a donc :
   $$\dim\left(E_0(A)\right) + \dim\left(E_{\lambda_1}(A)\right) + \dim\left(E_{\lambda_2}(A)\right) = 2 + 1 + 1 = 4 = \dim\left(\mathbb{R}^4\right)$$
   ce qui montre que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.
   (c) On suppose que $k = 0$. Diagonaliser explicitement A (on donnera $P \in GL_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que $P^{-1}AP = D$).
   Si $k = 0$, alors $\chi_A(X) = X^2\left(X^2 - 3\right) = X^2(X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3})$, donc les valeurs propres de A sont $0, \sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$. De plus, on a :
   $$E_0(A) = \operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$E_{\sqrt{3}}(A) = \mathrm{Ker}\left(A - \sqrt{3}I_4\right) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{-\sqrt{3}}(A) = \mathrm{Ker}\left(A + \sqrt{3}I_4\right) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que la famille

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

est une base adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^4 = E_0(A) \oplus E_{\sqrt{3}}(A) \oplus E_{-\sqrt{3}}(A)$, donc c'est une base de diagonalisation de A.
En notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à cette nouvelle base, on a donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$