Interrogation 10 - CORRECTION

Exercice 0.1. *Pour se rendre au lycée, un élève a le choix entre 4 itinéraires* $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ *et* D*. La probabilité qu'il a de choisir* A *(respectivement* B*, C) vaut* $\frac{1}{3}$ *(respectivement* $\left.\frac{1}{4}, \frac{1}{12}\right)$.
La probabilité d'arriver en retard en empruntant A (respectivement B, C*) est* $\frac{1}{20}$ *(respectivement* $\left.\frac{1}{10}, \frac{1}{5}\right)$*. En empruntant* D*, il n'est jamais en retard.*

1. *Quelle est la probabilité qu'il emprunte le chemin D ?*
   Notons R l'événement "être en retard", A l'événement "prendre les chemin A, et de même pour B et C et D. $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}\}$ *forme un système complet d'événements. Donc* $\mathrm{P}(\mathrm{D}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}) - \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{C}) = \frac{1}{3}$
2. *L'élève arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait emprunté l'itinéraire C ?*
   On cherche $\mathrm{P}_{\mathrm{R}}(\mathrm{C})$.
   D'après les formules de probabilités totales :

   $$\begin{aligned}&\mathrm{P}(\mathrm{R}) = \mathrm{P}(\mathrm{R} \cap \mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{R} \cap \mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{R} \cap \mathrm{C}) + \mathrm{P}(\mathrm{R} \cap \mathrm{D})\\ &= \mathrm{P}(\mathrm{A}) \times \mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{R}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) \times \mathrm{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{R}) + \mathrm{P}(\mathrm{C}) \times \mathrm{P}_{\mathrm{C}}(\mathrm{R}) + \mathrm{P}(\mathrm{D}) \times \mathrm{P}_{\mathrm{D}}(\mathrm{R})\\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{7}{120}\end{aligned}$$

   Et $\mathrm{P}(\mathrm{R} \cap \mathrm{C}) = \mathrm{P}(\mathrm{C}) \times \mathrm{P}_{\mathrm{C}}(\mathrm{R}) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{60}$.
   Finalement, $\mathrm{P}_{\mathrm{R}}(\mathrm{C}) = \frac{1/60}{7/120} = \frac{2}{7}$

Exercice 0.2. *Un professeur oublie fréquemment ses clés. Pour tout* n*, on note :* E_n *l'événement « le jour* n*, le professeur oublie ses clés »,* $P_n = P(E_n), Q_n = P\left(\overline{E_n}\right)$.
On suppose que : $P_1 = a \in [0;1]$ *est donné et que :*

- *si le jour* n *il oublie ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité* $\frac{1}{10}$ *;*
- *si le jour* n *il n'oublie pas ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité* $\frac{4}{10}$.

1. *Montrer que* $P_{n+1} = \frac{1}{10} P_n + \frac{4}{10} Q_n$.
   On sait que $\left\{E_n, \overline{E_n}\right\}$ *est un S.C.E, donc, d'après la formule des probabilités totales :*

   $$\begin{aligned}&P_{n+1} = P(E_{n+1}) = P_{E_n}(E_{n+1}) P(E_n) + P_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) P\left(\overline{E_n}\right)\\ &= \frac{1}{10} P_n + \frac{4}{10} Q_n.\end{aligned}$$

   Donc $P_{n+1} = \frac{1}{10} P_n + \frac{4}{10}(1 - P_n) = \frac{4}{10} - \frac{3}{10} P_n$

2. *Montrer que la suite* $\left(P_n - \frac{4}{13}\right)$ *est géométrique.*
   $P_{n+1} - \frac{4}{13} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}P_n - \frac{4}{13} = \frac{12}{130} - \frac{3}{10}P_n = \frac{-3}{10}(P_n - \frac{4}{13})$
   La suite est donc bien géométrique de raison $\frac{-3}{10}$.
3. *Quelle est la probabilité de l'événement "le jour* n*, le professeur oublie ses clés" ?*
   D'après la question précédente :
   $$P_n - \frac{4}{13} = (P_1 - \frac{4}{13})(\frac{-3}{10})^{n-1}$$
   Donc : $P_n = \frac{4}{13} + a\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$.