

Aix-Marseille Université
Mémoire de stage de Master 2

Directeur de mémoire : **Michael PUSCHNIGG**

**L'indice des opérateurs de Toeplitz
classiques.**

Jean-Marie CABRERA

Marseille, le 17 juin 2014

Remerciements

Reprendre des études, après de nombreuses années, n'a pas toujours été facile. Madame Luisa PAOLUZZI, responsable du Master 2 de mathématiques fondamentales, m'a conseillé et soutenu dans mes démarches tout au long de cette année universitaire. Je souhaite lui adresser tous mes remerciements.

Je remercie également Monsieur Michael PUSCHNIGG, mon directeur de mémoire. Son aide m'a été essentielle. Il m'a dirigé, orienté et aidé tout au long de mon travail. Sa disponibilité, son écoute et sa compréhension de tous les instants m'ont donné le courage de surmonter les moments de découragement.

Table des matières

1	INTRODUCTION	4
2	Classes d'homotopie des lacets dans le plan privé d'un point.	6
2.1	Homotopie.	6
2.2	Relèvement de chemins.	7
2.3	Indice d'un lacet.	10
3	Théorie élémentaire des opérateurs de Toeplitz.	13
4	Opérateurs de Fredholm et leur indice.	16
4.1	Définition et premières propriétés.	17
4.2	Adjoint d'un opérateur de Fredholm.	20
4.3	Propriétés de la fonction indice.	21
4.3.1	Préliminaire : Opérateurs inversibles.	21
4.3.2	Continuité - Petite perturbation en norme.	22
4.3.3	Additivité.	26
4.4	Perturbation par un opérateur compact.	28
4.5	Inversibilité modulo un compact.	31
5	L'indice des opérateurs de Toeplitz classiques.	33
5.1	Notations.	33
5.2	Théorème de l'indice.	34
5.3	Autre formule : opérateurs traçables	35
6	Bibliographie.	42

1 INTRODUCTION

Tout d'abord, nous commençons par définir l'indice par rapport à zéro d'un lacet dans le plan complexe privé de 0. Nous démontrons que deux lacets sont homotopes si et seulement si ils ont le même indice par rapport à 0. Cette propriété est très utile pour simplifier les démonstrations des égalités d'indice.

Puis nous définissons les opérateurs de Fredholm : étant donnés $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux espaces de Hilbert ainsi qu'un opérateur borné $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$, on dit que T est de Fredholm lorsque :

1. la dimension du noyau est finie
2. la dimension du conoyau est finie

L'indice de Fredholm est alors défini par :

$$Ind(T) = \dim(Ker(T)) - \text{codim}(Im(T)).$$

Deux cas se présentent :

1. Si l'indice de T est non nul alors T n'est pas inversible.
2. Si l'indice est nul alors il existe un opérateur compact K tel que $T + K$ est inversible.

Notons $\mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ l'ensemble des opérateurs de Fredholm. Nous établissons que $\mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ est stable sous déformations compactes ainsi que sous de petites déformations en normes. De plus, si noyau et conoyau sont modifiés sous ces déformations, l'indice de l'opérateur, lui, reste inchangé.

Nous montrons que l'application Indice : $\mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{H}') \rightarrow \mathbb{Z}$ identifie l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ avec l'ensemble des entiers relatifs.

Ensuite, nous introduisons l'opérateur de Toeplitz T_f associé à une fonction $f : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$. Nous démontrons que si f est continue et inversible alors T_f est de Fredholm et que son indice de Fredholm est égal à l'opposé de l'indice de son lacet associé $\tilde{f}$:

$$Ind(T_f) = -Ind_{\tilde{f},0}$$

Nous mettons donc en relation deux invariants sous déformation continue : un invariant analytique (l'indice de Fredholm) et un invariant topologique (l'indice d'un lacet).

Enfin, dans le cas particuliers où f est continue, inversible et telle que $[F, m_f]$ est un opérateur traçable (cela est satisfait pour des lacets suffisamment réguliers), nous établissons une formule d'indice explicite, qui est de nature purement algébrique :

$$Ind(T_f) = \frac{1}{2} Tr(m_{f^{-1}} [F, m_f])$$

où $F = 2P - I$, P étant la projection sur l'espace de Hardy.

2 Classes d'homotopie des lacets dans le plan privé d'un point.

Soit $A \subset \mathbb{C}$. Un lacet dans A est une application continue $\gamma : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ que $\gamma(0) = \gamma(1)$ et $\gamma([0; 1]) \subset A$. L'homotopie formalise la notion de déformation continue d'un objet à un autre. Ainsi, deux lacets sont dits homotopes lorsqu'il est possible de passer continument de l'un à l'autre. L'indice d'un lacet est un entier qui va nous permettre de caractériser l'homotopie entre deux lacets : deux lacets sont homotopes si et seulement si ils ont le même indice par rapport à 0.

C'est la définition la plus générale de l'indice qui sera présentée ici : elle permettra de définir l'indice d'un lacet dans le cas « continu » et pas seulement dans le cas « différentiable par morceaux ». Elle utilise la propriété de relèvement des chemins dans le revêtement universel réalisé par l'exponentielle complexe.

Dans le cas particulier où un lacet γ dans $\mathbb{C}^*$ est différentiable par morceaux, nous montrerons que $Ind_{\gamma,0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$.

2.1 Homotopie.

Définition 2.1 Soient X et Y deux espaces topologiques et soient $f_0 : X \rightarrow Y$ et $f_1 : X \rightarrow Y$ des applications continues. On dit que f_0 est homotope à f_1 lorsqu'il existe une application continue $F : X \times [0; 1] \rightarrow Y$ telle que pour tout $x \in X$, $F(x, 0) = f_0(x)$ et $F(x, 1) = f_1(x)$.

Lemme 2.2 (Lemme de recollement) Soient X et Y des espaces topologiques. Supposons que $X = A \cup B$ où A et B sont des sous-ensembles fermés de X . Soient $f_1 : A \rightarrow Y$ et $f_2 : B \rightarrow Y$ des applications continues telles que $f_1(x) = f_2(x)$ pour tout $x \in A \cap B$. Soit $g : X \rightarrow Y$ définie par $g(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in A \\ f_2(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$. Alors g est continue.

Proposition 2.3 L'homotopie est une relation d'équivalence.

Preuve :

1. Soit $f \in C(X, Y)$, posons $F : X \times [0; 1] \rightarrow Y$ définie par $F(x, t) = f(x)$. Et soit $i : X \times [0; 1] \rightarrow X$ définie par $i(x, t) = x$, alors i est continue et $F = f \circ i$. Par composition, F est continue sur $X \times [0; 1]$ et pour tout $x \in X$: $F(x, 0) = f(x)$ et $F(x, 1) = f(x)$ donc $f \sim f$

2. Supposons que $f \sim g$. Alors il existe $F : X \times [0; 1] \rightarrow Y$ continue telle que pour tout $x \in X$, $F(x, 0) = f_0(x)$ et $F(x, 1) = f_1(x)$. Soit $G : X \times [0; 1] \rightarrow Y$ définie par $G(x, t) = F(x, 1-t)$. Alors G est continue car $\varphi : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ définie par $\varphi(t) = 1-t$ est continue sur $[0; 1]$. D'où $g \sim f$.
3. Soient f, g et h telles que $f \sim g$ et $g \sim h$. Alors il existe des fonctions continues $F, G : X \times [0; 1] \rightarrow Y$ telles que $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x) = G(x, 0)$ et $G(x, 1) = h(x)$. Soit $H : X \times [0; 1] \rightarrow Y$ définie par $H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$. Alors $H(x, 0) = f(x)$ et $H(x, 1) = h(x)$. Par ailleurs, d'après le lemme de recollement, H est continue. Donc $f \sim h$. $\square$.

Définition 2.4 Deux chemins γ_1 et γ_2 de x_0 à x_1 sont dits homotopes lorsqu'il existe une application continue $F : [0; 1] \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

1. pour tout $t \in [0; 1]$, $\gamma_0(t) = F(t, 0)$ et $\gamma_1(t) = F(t, 1)$.
2. pour tout $t \in [0; 1]$, $F(0, t) = x_0$ et $F(1, t) = x_1$.

Remarque 2.5 1. La relation d'homotopie entre chemins est une relation d'homotopie au sens usuel entre deux applications avec la condition supplémentaire que les extrémités restent fixes à travers l'homotopie.

2. La relation d'homotopie entre chemins reste une relation d'équivalence.

2.2 Relèvement de chemins.

Définition 2.6 Un espace X est localement connexe par arc lorsque tout point $x \in X$ et tout ouvert V contenant x , il existe un ouvert U avec $x \in U \subset V$ tel que pour tout $(x_1, x_2) \in U$ il existe un chemin α de x_1 à x_2 tel que $\alpha([0; 1]) \subset U$.

Définition 2.7 Soient X et $\tilde{X}$ localement connexes par arcs et soit $p : \tilde{X} \rightarrow X$ continue. On dit que $(\tilde{X}, p)$ est un revêtement de X lorsque :

1. p est surjective
2. Pour tout $x \in X$ il existe un ouvert U de X contenant x tel que $p^{-1}(U)$ est union d'ouverts disjoints $(V_i)_{i \in I}$ avec $p|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ est un homéomorphisme pour tout $i \in I$. Nous dirons que l'ouvert U est admissible.

Proposition 2.8 *Notons $\exp$ l'exponentielle complexe. Alors $(\mathbb{C}, \exp)$ est un revêtement de $\mathbb{C}^*$*

Preuve :

1. $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est surjective : soit $z \in \mathbb{C}^*$. $\mathbb{C}^*$ étant connexe par arc, il existe un chemin $\zeta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\zeta(0) = 1$ et $\zeta(1) = z$. Soit $l : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $l(t) = \int_0^t \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds$.
 ζ et ζ' sont continus et ζ ne s'annule pas donc $\frac{\zeta'}{\zeta}$ est continue et l est dérivable de dérivée $l'(t) = \frac{\zeta'(t)}{\zeta(t)}$. Posons $g(t) = \zeta(t)\exp(-l(t))$. Alors :
 $g'(t) = \zeta'(t)\exp(-l(t)) - \frac{\zeta'(t)}{\zeta(t)}\exp(-l(t)) = 0$. Donc g est constante :
 $g(t) = g(0) = 1$. Ainsi : $\exp(l(t)) = \zeta(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. En particulier : $\exp(l(1)) = \zeta(1) = z$, d'où la surjectivité.
2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $\theta \in [-\pi, \pi]$ qui n'est pas un argument de z . Posons $U_\theta = \{z \in \mathbb{C}^*, \arg(z) \neq \theta\}$. Alors $p^{-1}(U_\theta)$ est l'union disjointe des ouverts $V_n = \{z \in \mathbb{C}, |Im(z) - \theta - 2\pi n| < \pi\}$ avec $n \in \mathbb{N}$. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p : V_n \rightarrow U_\theta$ est un homéomorphisme $\square$.

Théorème 2.9 : *Soit $(\tilde{X}, p)$ un revêtement de X et soit Y un espace compact, connexe et localement connexe. Soient $f : Y \rightarrow \tilde{X}$ et $F : Y \times [0, 1] \rightarrow X$ une homotopie telle que $F(y, 0) = (p(f(y)))$ pour tout $y \in Y$. Alors, il existe une homotopie $G : Y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ telle que :*

1. $\forall y \in Y, G(y, 0) = f(y)$
2. $p \circ G = F$

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & \tilde{X} \\ & \nearrow G & \downarrow p \\ Y \times [0, 1] & \xrightarrow{F} & X \end{array}$$

Preuve : Notons $I = [0, 1]$. $Y \times I$ est compact car Y et I le sont. Ainsi, $F(Y \times I)$ est compact car F est continue. Tout $x \in F(Y \times I)$ admet un ouvert U_x admissible. Donc $F(Y \times I)$ peut être recouvert par les ouverts U_x . $F(Y \times I)$ étant compact, d'après la propriété de Borel Lesbesque, on peut en extraire un sous recouvrement fini : $U_1, U_2, \dots, U_r$.

Ainsi, $F^{-1}(U_1), F^{-1}(U_2), \dots, F^{-1}(U_r)$ est un recouvrement fini d'ouverts de $Y \times I$. Les ouverts du type $V \times]a, b[$ où V est un ouvert de Y et

$0 \leq a \leq b \leq 1$ engendrent les ouverts de $Y \times I$. Y étant compact, il existe donc un recouvrement fini $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ d'ouverts connexes de Y et des réels $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ tels que : pour tout $\alpha \in J$ et pour tout $i \in \{0, k-1\}$, il existe $l \in \{1, r\}$ tel que $V_\alpha \times [t_i, t_{i+1}] \subset F^{-1}(U_l)$. D'où $F(V_\alpha \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_l$.

Nous allons créer $G : Y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ en construisant des applications $G_i : Y \times [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \tilde{X}$ telles que :

1. $p \circ G_i = F|_{Y \times [t_{i-1}, t_i]}$
2. G_i est continue.
3. $G_i = G_{i+1}$ sur $Y \times [t_{i-1}, t_i] \cap Y \times [t_i, t_{i+1}] = \{(y, t_i); y \in Y\}$

Soit $j < k-1$, supposons les G_i définies pour $0 \leq i \leq j$. Construisons G_{j+1} vérifiant les trois propriétés ci-dessus.

Pour que (3) soit vérifiée, on a nécessairement : $G_{j+1}(y, t_j) = G_j(y, t_j)$. Comme V_α est connexe et que G_j est continue, $G_j(V_\alpha \times \{t_j\})$ est connexe et vérifie : $p \circ G_j(V_\alpha \times \{t_j\}) = F(V_\alpha \times \{t_j\}) \subset U_l$. Par conséquent, $G_j(V_\alpha \times \{t_j\})$ est inclus dans un des ouverts $W_\alpha \subset p^{-1}(U_l)$. Nous savons que $p : W_\alpha \rightarrow U_l$ est un homéomorphisme. On peut donc définir l'application $G_{j+1}^\alpha = (p|_{W_\alpha})^{-1} \circ F|_{V_\alpha \times [t_j, t_{j+1}]}$. Reste à définir l'application G_{j+1} définie sur $Y \times [t_j, t_{j+1}]$ tout entier. Nous allons l'obtenir en posant $G_{j+1}(y, t) = G_{j+1}^\alpha(y, t)$ si $(y, t) \in V_\alpha \times [t_j, t_{j+1}]$. Reste à vérifier que :

1. **G_{j+1} est alors bien définie** : Soit $(\alpha, \beta) \in J^2$ tels que $V_\alpha \cap V_\beta$ non vide. Supposons que si $\gamma \in \{\alpha, \beta\}$ alors $G_j(V_\gamma \times \{t_j\}) \subset W_\gamma$ avec $p : W_\alpha \rightarrow U_l$ et $p : W_\beta \rightarrow U_m$ les deux homéomorphismes associés par le relèvement. Il nous faut montrer que G_{j+1}^α et G_{j+1}^β coïncident sur $(V_\alpha \cap V_\beta) \times [t_j, t_{j+1}]$.
Par construction : $G_{j+1}^\alpha = G_j$ sur $V_\alpha \times \{t_j\}$ et $G_{j+1}^\beta = G_j$ sur $V_\beta \times \{t_j\}$ donc $G_{j+1}^\alpha = G_{j+1}^\beta$ sur $(V_\alpha \cap V_\beta) \times \{t_j\}$.

Or tout point de $(V_\alpha \cap V_\beta) \times [t_j, t_{j+1}]$ peut être relié à un point de $(V_\alpha \cap V_\beta) \times \{t_j\}$ par un arc de $(V_\alpha \cap V_\beta) \times [t_j, t_{j+1}]$. Donc, par continuité de G_{j+1}^α , on a : $G_{j+1}^\alpha((V_\alpha \cap V_\beta) \times [t_j, t_{j+1}]) \subset W_\alpha \cap W_\beta$, de même : $G_{j+1}^\beta((V_\alpha \cap V_\beta) \times [t_j, t_{j+1}]) \subset W_\alpha \cap W_\beta$ (*).

Or : $p \circ G_{j+1}^\alpha = p \circ (p|_{W_\alpha})^{-1} \circ F|_{V_\alpha \times [t_j, t_{j+1}]} = F|_{V_\alpha \times [t_j, t_{j+1}]}$ et

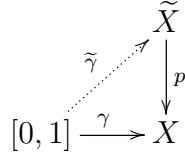
$p \circ G_{j+1}^\beta = p \circ (p|_{W_\beta})^{-1} \circ F|_{V_\alpha \times [t_j, t_{j+1}]} = F|_{V_\beta \times [t_j, t_{j+1}]}$. D'où :
 $p \circ G_{j+1}^\alpha = p \circ G_{j+1}^\beta$ sur $(V_\alpha \cap V_\beta) \times [t_j, t_{j+1}]$ (**). Par ailleurs, $p|_{W_\alpha} = p|_{W_\beta}$ sur $W_\alpha \cap W_\beta$, donc d'après (*) et (**): $G_{j+1}^\alpha = G_{j+1}^\beta$ sur $(V_\alpha \cap V_\beta) \times [t_j, t_{j+1}]$.

2. G_{j+1} est continue : G_{j+1} est continue sur $V_\alpha \times [t_j, t_{j+1}]$ et sur $V_\beta \times [t_j, t_{j+1}]$ et les restrictions de G_{j+1} à ses deux ensembles sont égales sur $(V_\alpha \cap V_\beta) \times [t_j, t_{j+1}]$. Donc, d'après le lemme de recollement G_{j+1} est continue.

3. Par le même raisonnement, on montre que G_1 est bien définie : on pose $G_1(y, t_0) = f(y)$ pour tout $y \in Y$ puis on prolonge G_1 à $Y \times [t_0, t_1]$.

Chaque G_i est continue sur $Y \times [t_{i-1}, t_i]$ et $G_i = G_{i+1}$ sur $Y \times [t_{i-1}, t_i] \cap Y \times [t_i, t_{i+1}]$ donc, d'après le lemme de recollement, G est continue sur $Y \times [0, 1]$ $\square$

Corollaire 2.10 Soit $(\tilde{X}, p)$ un revêtement de X . Soit γ un chemin dans X . Posons $\gamma(0) = x_0 \in X$ et soit $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ tel que $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Alors il existe un chemin $\tilde{\gamma}$ dans $\tilde{X}$ d'origine $\tilde{x}_0$ tel que $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.
On dit que $\tilde{\gamma}$ est un relèvement de γ d'origine x_0 .



Remarque 2.11 Il est possible de prouver l'unicité d'un tel chemin $\tilde{\gamma}$.

Preuve du Corollaire 2.10 : Posons $Y = \{y_0\}$ et définissons $f : Y \rightarrow \tilde{X}$ par $f(y_0) = \tilde{x}_0$. Soit $F : Y \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que $F(y_0, t) = \gamma(t)$. Alors $F(y_0, 0) = \gamma(0) = x_0$ et $p(f(y_0)) = p(\tilde{x}_0) = p(x_0)$. Par ailleurs, Y est compact, connexe et localement connexe. Donc, d'après le Théorème 2.9, il existe une homotopie $G : Y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ telle que $p \circ G = F$ et $G(y_0, 0) = f(y_0) = \tilde{x}_0$. Alors $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ définie par $\tilde{\gamma}(t) = G(y_0, t)$ possède les propriétés attendues $\square$.

2.3 Indice d'un lacet.

Nous sommes maintenant en mesure de définir l'indice d'un lacet. Deux lacets seront homotopes si et seulement si ils ont le même indice. Par ailleurs, la relation d'homotopie étant une relation d'équivalence, nous allons mettre en évidence un représentant particulier pour chaque classe d'homotopie.

Définition 2.12 Soit $A \subset \mathbb{C}$. Un lacet dans A est une application continue $\gamma : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ que $\gamma(0) = \gamma(1)$ et $\gamma([0; 1]) \subset A$.

Théorème 2.13 Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ est un lacet dans le plan complexe privé de l'origine, alors il existe un relèvement $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ de γ à travers l'exponentielle complexe. C'est-à-dire un chemin $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $e^{\tilde{\gamma}} = \gamma$.

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{C} \\ & \nearrow \tilde{\gamma} & \downarrow \exp \\ [0, 1] & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{C}^* \end{array}$$

Remarque 2.14 $\tilde{\gamma}$ est un chemin mais n'est pas nécessairement un lacet (ie : il se peut que $\tilde{\gamma}(0) \neq \tilde{\gamma}(1)$).

Preuve du Théorème 2.13 : Nous savons que $(\mathbb{C}, \exp)$ est un revêtement de $\mathbb{C}^*$. Donc, d'après le corollaire précédent, il existe un chemin $\tilde{\gamma}$ dans $\tilde{X}$ d'origine $\tilde{x}_0$ tel que $\exp \circ \tilde{\gamma} = \gamma \square$.

Proposition 2.15 Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ un lacet dans le plan complexe privé de l'origine. Et soit $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ un de ses relèvements. Alors la quantité $\frac{1}{2\pi i}(\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0))$ est un nombre entier qui ne dépend pas du relèvement choisi. Nous l'appellerons **l'indice de γ par rapport à 0**, noté $Ind_{\gamma,0}$.

Preuve : $\gamma(0) \neq 0$ car $\gamma(0) \in \mathbb{C}^*$ d'où $\frac{\tilde{\gamma}(1)}{\tilde{\gamma}(0)} = e^{\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)} = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = 1$. Ainsi $\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) \in (\exp)^{-1}(\{1\})$. Posons $z = x + iy$ alors :

$$e^z = 1 \iff e^x e^{iy} = 1 \iff x = 0 \text{ et } y \in 2\pi i\mathbb{Z}.$$

D'où :

1. Si $\tilde{\tilde{\gamma}}$ est un autre relèvement de γ alors $e^{\tilde{\tilde{\gamma}}} = e^{\tilde{\gamma}}$ donc $\tilde{\tilde{\gamma}} - \tilde{\gamma}$ est à valeurs dans $2\pi i\mathbb{Z}$. Posons $d = \tilde{\tilde{\gamma}} - \tilde{\gamma}$ alors d est continue sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $2\pi i\mathbb{Z}$, elle est donc constante. D'où $d(1) = d(0)$ et $\tilde{\tilde{\gamma}}(1) - \tilde{\tilde{\gamma}}(0) = \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)$.
2. $\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ et $\frac{1}{2\pi i}(\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)) \in \mathbb{Z} \square$

Théorème 2.16 Pour chaque lacet γ dans $\mathbb{C}^*$, différentiable par morceaux :

$$Ind_{\gamma,0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$$

Preuve : Remarquons tout d'abord que $\gamma'(t) = (\tilde{\gamma})'(t)e^{\tilde{\gamma}}$ Donc : $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{(\tilde{\gamma})'(t)e^{\tilde{\gamma}(t)}}{e^{\tilde{\gamma}(t)}} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 (\tilde{\gamma})'(t) dt = \frac{1}{2\pi i} (\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)) = \text{Ind}_{\gamma,0} \square$

Remarque 2.17 *L'indice est donc un invariant aussi bien topologique que analytique.*

Théorème 2.18 *Deux lacets sont homotopes si et seulement si ils ont le même indice par rapport à 0.*

Preuve :

1. Soient γ_1 et γ_2 deux lacets homotopes. Alors il existe $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ telle que pour tout $t \in [0, 1]$, $\gamma_1(t) = F(t, 0)$ et $t \in [0, 1]$, $\gamma_2(t) = F(t, 1)$. D'après le Théorème 2.9, il existe $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $e^{G(t,x)} = F(t, x)$ Soient les lacets :

- (a) $\tilde{\gamma}_1$ défini par $\tilde{\gamma}_1(t) = G(t, 0)$. Alors $e^{\tilde{\gamma}_1(t)} = e^{G(t,0)} = F(t, 0) = \gamma_1(t)$. Donc $\tilde{\gamma}_1$ est un relèvement de γ_1 et $\text{Ind}_{\gamma_1,0} = \frac{1}{2\pi i} (G(1, 0) - G(0, 0))$
- (b) $\tilde{\gamma}_2$ défini par $\tilde{\gamma}_2(t) = G(t, 1)$. Alors $e^{\tilde{\gamma}_2(t)} = e^{G(t,1)} = F(t, 1) = \gamma_2(t)$. Donc $\tilde{\gamma}_2$ est un relèvement de γ_2 et $\text{Ind}_{\gamma_2,0} = \frac{1}{2\pi i} (G(1, 1) - G(0, 1))$

Posons $d(t) = G(1, t) - G(0, t)$ alors $e^{d(t)} = 1$ car $e^{G(1,t)} = e^{G(0,t)}$. En effet, pour tout $t \in [0, 1]$ $\gamma(x) = F(x, t)$ est un lacet. D'où $d(t) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ et d étant continue sur $[0, 1]$, d est nécessairement constante. Ainsi $\text{Ind}_{\gamma_2,0} = \frac{1}{2\pi i} d(1) = d(0) = \text{Ind}_{\gamma_1,0}$

2. Supposons maintenant que γ_1 et γ_2 ont le même indice. Montrons qu'ils sont homotopes. Soient $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ des relèvements respectifs de γ_1 et γ_2 . Alors $\tilde{\gamma}_1(1) - \tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(1) - \tilde{\gamma}_2(0) (*)$ car γ_1 et γ_2 ont le même indice. Définissons l'application $H : [0, 1] \times [0, 1]$ par $H(x, t) = (1 - t)\tilde{\gamma}_1(x) + t\tilde{\gamma}_2(x)$. Alors H est continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$ et vérifie : $H(x, 0) = \tilde{\gamma}_1(x)$ et $H(x, 1) = \tilde{\gamma}_2(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Posons maintenant $H = \exp \circ \tilde{H}$. Alors :

- (a) $H(x, 0) = e^{\tilde{H}(x,0)} = e^{\tilde{\gamma}_1(x)} = \gamma_1(x)$
- (b) $H(x, 1) = e^{\tilde{H}(x,1)} = e^{\tilde{\gamma}_2(x)} = \gamma_2(x)$

Il reste à vérifier que pour tout $t \in [0, 1]$, $\gamma(x) = H(x, t)$ est un lacet :

$\tilde{H}(1, t) - \tilde{H}(0, t) = (1 - t)\tilde{\gamma}_1(1) + t\tilde{\gamma}_2(1) - (1 - t)\tilde{\gamma}_1(0) - t\tilde{\gamma}_2(0) = (1 - t)(\tilde{\gamma}_1(1) - \tilde{\gamma}_1(0)) + t(\tilde{\gamma}_2(1) - \tilde{\gamma}_2(0)) = 2\pi i \text{Ind}_{\gamma_1,0}$ d'après (*). Or $\text{Ind}_{\gamma_1,0} \in \mathbb{Z}$ donc $e^{\tilde{H}(1,t) - \tilde{H}(0,t)} = 1$ et $H(1, t) = H(0, t)$. Ainsi, H est bien une homotopie de lacets entre γ_1 et γ_2 s'ils ont le même indice $\square$

Corollaire 2.19 Soit γ un lacet d'indice $n \in \mathbb{Z}$ par rapport à 0. Alors γ est homotope au lacet γ_n défini par $\gamma_n(t) = e^{2\pi i n t}$.

Preuve : γ_n est un lacet dans $\mathbb{C}^*$ différentiable, donc, d'après le Théorème 2.16 :

$$\text{Ind}_{\gamma_n, 0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma_n'(t)}{\gamma_n(t)} dt = n$$

D'après le Théorème 2.18, γ est homotope au lacet γ_n car ils ont le même indice par rapport à 0 $\square$

3 Théorie élémentaire des opérateurs de Toeplitz.

Définition 3.1 Soit $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. La mesure de Lebesgue μ sur S^1 est l'unique mesure borélienne positive de masse totale 1 invariante par les rotations. Pour toute fonction continue $f : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\int_{S^1} f(z) d\mu = \int_0^1 f(e^{2\pi i t}) dt.$$

Posons $e_n : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ défini par $e_n(z) = z^n$ alors $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(S^1)$ muni du produit scalaire $\langle f|g \rangle = \int_{S^1} f \bar{g} d\mu$.

Si $f \in L^2(S^1)$ alors f admet une série de Fourier :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n \text{ avec } a_n = \hat{f}(n) = \int_0^1 f(e^{2\pi i t}) e^{-2\pi i n t} dt$$

Définition 3.2 Définissons les applications $e_n : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$, pour $n \in \mathbb{Z}$, par $e_n(z) = z^n$. L'espace de Hardy $\mathcal{H}^2$ (aussi noté $H^2(S^1)$) est la clôture de $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ dans l'espace de Hilbert $L^2(S^1, d\mu)$.

Remarque 3.3 1. $\mathcal{H}^2 = \left\{ f \in L^2(S^1) / \hat{f}(n) = 0, \forall n < 0 \right\}$. Les vecteurs $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ forment une base orthonormale de $\mathcal{H}$. Par conséquent, si $f \in \mathcal{H}$ alors f admet une série de Fourier du type : $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

2. $\mathcal{H}^2$ est le complémentaire orthogonal de $\{e_n, n \leq -1\}$ dans l'espace de Hilbert $L^2(S^1, dt)$.

3. On a : $\|f\|_{\mathcal{H}^2} = \sqrt{\int_0^1 |f(e^{2\pi it})|^2 dt}$.

Proposition 3.4 Soit $f \in C(S^1, \mathbb{C})$. Alors l'application $M_f : L^2(S^1, dt) \rightarrow L^2(S^1, dt)$ définie par $M_f(g) = fg$ est un opérateur linéaire borné avec :

$$\|M_f\| = \|f\|_{\infty} .$$

Preuve :

1. La linéarité est triviale.
2. Il s'agit d'un opérateur borné d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
En effet : $\|M_f(g)\|_2^2 \leq \|f\|_{\infty}^2 \times \|g\|_2^2$ donc $\|M_f\| \leq \|f\|_{\infty}$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $A_{\varepsilon} = \{z \in S^1 / |f(z)| \geq N - \varepsilon\}$ où $N = \|f\|_{\infty}$.
Soit la fonction $g : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$g(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in A_{\varepsilon} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \|M_f(g)\|_{L^2(S^1)} &= \sqrt{\int_{S^1} |f(z)g(z)|^2 dz} = \sqrt{\int_{A_{\varepsilon}} |f(z)|^2 dz} \\ &\geq \sqrt{\int_{A_{\varepsilon}} (N - \varepsilon)^2 dz} = (N - \varepsilon) \sqrt{\int_{A_{\varepsilon}} dz} = (N - \varepsilon) \times \|g\|_{L^2(S^1)} \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\|M_f\| \geq \frac{\|M_f(g)\|_{L^2(S^1)}}{\|g\|_{L^2(S^1)}} \geq N - \varepsilon .$$

L'inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, il vient : $\|M_f\| \geq \|f\|_{\infty} \square$

Proposition 3.5 $M_f^* = M_{\bar{f}}$.

Preuve : Soient $g, h \in L^2(S^1)$ alors $\langle M_f(h)|g \rangle = \langle fh|g \rangle = \int_{S^1} fh\bar{g} d\mu = \int_{S^1} h\overline{fhg} d\mu = \langle h|M_{\bar{f}}g \rangle$. D'où $M_f^* = M_{\bar{f}} \square$.

Définition 3.6 Soit $f \in C(S^1, \mathbb{C})$. Notons $P : L^2(S^1) \rightarrow \mathcal{H}^2$ la projection orthogonale sur $\mathcal{H}^2$. L'opérateur $T_f : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{H}^2$ défini par $T_f = P \circ M_f$ est appelé l'**opérateur de Toeplitz** associé à f .

Proposition 3.7 Soit $f \in C(S^1, \mathbb{C})$, on a :

1. $\|T_f\| \leq \|f\|_{\infty}$
2. $T_f^* = T_{\bar{f}}$

Preuve :

1. Soit $f \in C(S^1, \mathbb{C})$:

$$\|T_f\| = \|P \circ M_f\| \leq \|P\| \times \|M_f\|$$

Or, P étant une projection orthogonale : $\|P\| = 1$, d'où :

$$\|T_f\| \leq \|M_f\| \leq \|f\|_\infty$$

2. Soit $g \in \mathcal{H}^2$ alors $P(g) = g$ d'où : $M_f P(g) = M_f g$ et $P M_f P(g) = P M_f(g)$. Ainsi : $P M_f P = T_f$. Il vient : $T_f^* = (P M_f P)^* = P^* M_f^* P^*$. Or P est auto-adjoint comme projection orthogonale et $M_f^* = M_{\bar{f}}$. D'où : $T_f^* = P M_{\bar{f}} P = T_{\bar{f}}$. $\square$.

Théorème 3.8 Soit $f \in C(S^1)$. L'opérateur de Hankel, $H_f : \mathcal{H}^2 \rightarrow (\mathcal{H}^2)^\perp$ défini par $H_f = (I - P) \circ M_f = M_f - T_f$ est compact.

Rappel 3.9 (Théorème de Stone-Weierstrass complexe) : Soient S un espace compact et A une sous algèbre de $C(S, \mathbb{C})$. On suppose que :

1. A sépare les points de S (ie : pour tout $x, y \in S$, $\exists P \in A$, $P(x) \neq P(y)$)
2. $1_S \in A$
3. pour chaque $f \in A$, la fonction conjuguée $\bar{f}$ appartient aussi à A

Alors A est dense dans $C(S, \mathbb{C})$.

Preuve du théorème 3.8 : $f \in C(S^1)$ donc, d'après le théorème de Stone-Weierstrass, f est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômes $p_n(z, \bar{z}) : \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$

1. si $f = z^k, k \geq 0$.

Tout d'abord, P est la projection orthogonale de $L^2(S_1)$ sur $\mathcal{H}^2$ donc $(I - P)(L^2(S_1)) \subset (\mathcal{H}^2)^\perp$. Soit $g \in \mathcal{H}^2$. Par définition de $\mathcal{H}^2$: $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ où $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge pour la norme sur $\mathcal{H}^2$. On a : $M_f(g) = f \times \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = z^k \times \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+k}$. Alors $M_f(g) \in \mathcal{H}$ donc $T_f(g) = P(M_f(g)) = M_f(g)$ et $H_f(g) = M_f(g) - T_f(g) = 0$. Par conséquent, H_f est compact.

2. si $f = z^{-k}, k > 0$.

Comme ci-dessus, soit $g \in \mathcal{H}^2$ avec $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. On a : $M_f(g) =$

$$f \times \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = z^{-k} \times \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n-k}. \text{ D'où : } P(M_f(g)) = P\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n-k}\right) =$$

$$P\left(\sum_{n=0}^{k-1} c_n z^{n-k}\right) + P\left(\sum_{n=k}^{\infty} c_n z^{n-k}\right) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n z^{n-k} \text{ et } T_f(g) = M_f(g) - p(M_f(g)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n-k} - \sum_{n=k}^{\infty} c_n z^{n-k} = \sum_{n=0}^{k-1} c_n z^{n-k} .$$

T_f étant de rang fini, c'est un opérateur compact.

3. **Cas général.** L'ensemble des opérateurs compacts a une structure d'espace vectoriel donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_{p_n} est un opérateur compact. Remarquons tout d'abord que pour tout $g \in \mathbb{H}$:

$$M_f(g) - M_{p_n}(g) = fg - p_n g = (f - p_n)g = M_{f-p_n}(g).$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \|H_f - H_{p_n}\| &= \|H_{f-p_n}\| = \|(I - P) \circ M_{f-p_n}\| \\ &\leq \|I - P\| \times \|M_{f-p_n}\| = \|I - P\| \times \|f - p_n\|_{\infty} . \end{aligned}$$

Or, par construction, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - p_n\| = 0$. Ainsi, H_f est un opérateur compact comme limite d'une suite d'opérateurs compacts $\square$

Corollaire 3.10 Soient $f, g \in C(S^1)$ alors $T_f \circ T_g - T_{fg}$ est un opérateur compact.

Preuve : remarquons tout d'abord que $M_f M_g = M_{fg}$ donc :

$$T_f \circ T_g - T_{fg} = P M_f P M_g - P M_{fg} = P M_f (P - I) M_g = -P M_f H_g$$

Or $P M_f$ est un opérateur borné et H_g est un opérateur compact donc $T_f \circ T_g - T_{fg}$ est un opérateur compact $\square$

Remarque 3.11 D'après le corollaire précédent, si $f, g \in C(S^1)$ alors : $T_f T_g = T_{fg} + K$ où K est un opérateur compact.

4 Opérateurs de Fredholm et leur indice.

Les opérateurs Fredholm sont des opérateurs ayant un noyau de dimension finie et une image de codimension finie. Nous montrerons que l'ensemble des opérateurs de Fredholm contient tous les opérateurs entre espaces de dimensions finies ainsi que les opérateurs inversibles modulo un opérateur compact.

Nous allons nous intéresser aux principales propriétés des opérateurs de Fredholm. Nous verrons que le caractère "Fredholm" ainsi que l'indice restent stables sous l'effet d'une petite perturbation en norme ainsi que sous l'effet d'une perturbation par un opérateur compact.

Enfin, nous déduirons du corollaire 3.10 précédent que les opérateurs de Toeplitz associés aux fonctions inversibles sont un exemple d'opérateurs de Fredholm (ils sont inversibles modulo un opérateur compact).

4.1 Définition et premières propriétés.

Définition 4.1 Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux espaces de Hilbert séparables. Un opérateur borné $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ est appelé opérateur de Fredholm lorsque :

1. $\text{Ker}(T)$ est de dimension finie.
2. $\text{Im}(T)$ est de codimension finie (ie : l'espace vectoriel quotient $\mathcal{H}'/\text{Im}(T)$, noté $\text{Coker}(T)$, est de dimension finie).

On définit alors l'**indice de T** comme :

$$\text{Ind}(T) = \dim(\text{Ker}(T)) - \text{codim}(\text{Im}(T)) = \dim(\text{Ker}(T)) - \dim(\mathcal{H}'/\text{Im}(T))$$

Remarque 4.2 Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ est bijectif alors $\text{Ker}(T) = \{0\}$ et $\text{Im}(T) = \mathcal{H}'$ est fermé de codimension nulle donc T est de Fredholm avec $\text{Ind}(T) = 0$.

Exemple 4.3 Considérons l'espace $C^2([0; 1])$ des fonctions $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$, deux fois dérivables et à dérivée seconde continue, muni du produit scalaire :

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Il s'agit d'un espace de Hilbert.

Soit l'opérateur $T : C^2([0; 1]) \rightarrow C([0; 1])$ défini par $T(f) = f''$. Il est clairement surjectif et son noyau est de dimension 2 (le sous-espace vectoriel des fonctions affines). Alors T est un opérateur de Fredholm avec $\text{Ind}(T) = 2$.

Contre-exemple 4.4 Supposons que la dimension de $\mathcal{H}$ soit infinie. Considérons l'opérateur nul $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ défini par $T(x) = 0_{\mathcal{H}'}$.

Alors $\text{Ker}(T) = \mathcal{H}$ est de dimension infinie. Donc T n'est pas de Fredholm. Il en est de même pour l'opérateur nul si la dimension de $\mathcal{H}'$ est infinie car la codimension de $\text{Im}(T)$ est alors infinie.

Exemple 4.5 Considérons le $\mathbb{C}$ espace vectoriel l^2 des suites complexes $(x_n)_{n \geq 0}$

telles que $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2} < +\infty$. Alors l^2 , muni du produit scalaire

$$\langle x | y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n}, \text{ est un espace de Hilbert.}$$

Considérons la translation à gauche $T_g : l^2 \rightarrow l^2$ telle que :

$$T_g((x_n)_{n \geq 0}) = (y_n)_{n \geq 0} \text{ avec } y_0 = 0 \text{ et } y_n = x_{n-1} \text{ si } n \geq 1$$

1. T_g est clairement linéaire et bornée.
2. $\text{Ker}(T_g)$ ne contient que la suite nulle. Donc $\dim(\text{Ker}(T_g)) = 0$
3. Dans $\text{Coker}(T_g) = l^2 / \text{Im}(T_g)$, une classe d'équivalence contient toutes les suites de même premier terme. Donc $\text{codim}(\text{Im}(T_g)) = 1$

T_g est donc un opérateur de Fredholm avec :

$$\text{Ind}(T_g) = \dim(\text{Ker}(T_g)) - \text{codim}(\text{Im}(T_g)) = 0 - 1 = -1$$

Remarque 4.6 On montre de même que la translation à droite dans l^2 est un opérateur de Fredholm d'indice 1.

Contre-exemple 4.7 Soit $i \in \mathbb{N}$. Considérons la projection canonique de l^2 sur $\mathbb{C} : P_i : l^2 \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $P_i((x_n)_{n \geq 0}) = x_i$.

P_i est un opérateur linéaire borné.

$\text{Ker}(P_i) = \{(x_n)_{n \geq 0} \in l^2 \mid x_i = 0\}$ est de dimension infinie donc P_i n'est pas un opérateur de Fredholm.

Proposition 4.8 Soient V et W des espaces vectoriels complexes de dimension finie et soit $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Alors T est de Fredholm avec :

$$\text{Ind}(T) = \dim(V) - \dim(W).$$

Preuve : V et W étant de dimension finie, ce sont des espaces Hilbertiens (on peut les munir d'un produit scalaire, ils sont complets) $\text{Ker}(T)$ est sous espace vectoriel de V dimension finie avec, selon le théorème du rang :

$$\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(V) - \text{rg}(T).$$

Or $\text{Im}(T)$ est de codimension $\dim(W) - \text{rg}(T)$ Ainsi T est de Fredholm avec $\text{ind}(T) = \dim(\text{Ker}(T)) - \text{codim}(\text{Im}(T)) = \dim(V) - \text{rg}(T) - (\dim(W) - \text{rg}(T)) = \dim(V) - \dim(W) \quad \square$

Rappel 4.9 Théorème des isomorphismes de Banach. Soient X et Y des espaces de Banach et $f : X \rightarrow Y$ linéaire, bijective et continue. Alors l'application réciproque f^{-1} est continue.

Proposition 4.10 Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ est de Fredholm alors $\text{Im}(T)$ est un sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}'$.

Preuve : T étant de Fredholm, $\mathcal{H}'/Im(T)$ est de dimension finie. Soit donc $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_p}\}$ une base de $\mathcal{H}'/Im(T)$ avec $v_i \in \mathcal{H}'$. Notons $V' = Vect(\{v_1, \dots, v_p\})$ et $W = Ker(T)^\perp$. Soit $W \oplus V'$ la somme hilbertienne de W et de V' et soit l'application $g : W \times V' \rightarrow \mathcal{H}'$ telle que $g(x, y) = T(x) + y$.

1. g est linéaire et continue.
2. g est injective : soit $(x, y) \in W \oplus V'$ tel que $T(x) + y = 0$. Alors $T(x) = -y \in Im(T) \cap V'$.
 $T(x) \in V'$ donc $T(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i$ et $T(x) \in Im(T)$ donc $\overline{T(x)} = \overline{0} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \overline{v_i}$. Or $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_p}\}$ une base de $\mathcal{H}'/Im(T)$ donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$. Finalement, $T(x) = 0$ donc $x \in Ker(T) \cap (Ker(T))^\perp$ et $x = 0$.
3. g est surjective : rappelons tout d'abord que, $Ker(T) = T^{-1}(\{0\})$ étant fermé : $\mathcal{H} = Ker(T) \oplus Ker(T)^\perp$. Soit $h' \in \mathcal{H}' - \{0\}$. Deux cas :
 - (a) Si $h' \in Im(T)$ alors il existe $x \in \mathcal{H}$ tel que $h' = T(x)$. De plus, il existe $y \in Ker(T)$ et $z \in W - \{0\}$ tels que $x = y + z$. On a : $T(x) = T(y) + T(z) = T(z)$, d'où $h' = g(z, 0)$.
 - (b) Si $h' \notin Im(T)$ alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$ tels que $\overline{h'} = \overline{0} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \overline{v_i}$. Alors $h' - \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i \in Im(T)$ et $h' - \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i \neq 0$ car sinon $h' \in Im(T)$. Ainsi, il existe $x \in W$ tel que $h' - \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i = T(x)$. En effet $x \notin Ker(T)$ car $h' \neq 0$ donc $x \in W$ car $\mathcal{H} = Ker(T) \oplus Ker(T)^\perp$. On a alors : $h' = g(x, \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i)$.

$g : W \oplus V' \rightarrow \mathcal{H}'$ est donc linéaire, bijective et continue entre deux espaces de Hilbert. D'après le théorème de l'isomorphisme de Banach, g est donc un homéomorphisme. g^{-1} étant continue, $(g^{-1})^{-1}(W \times \{0\}) = g(W \times \{0\}) = \{T(x), x \in Ker(T)^\perp\} = Im(T)$ est fermé $\square$

Remarque 4.11 De nombreux ouvrages ajoutent la condition $Im(T)$ fermée à la définition d'un opérateur de Fredholm. La propriété précédente nous montre que cela est superflu.

Contre-exemple 4.12 Un opérateur compact $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$, où $\mathcal{H}'$ est un espace de Hilbert de dimension infinie, n'est pas de Fredholm.

Preuve : Soient $\mathcal{H}'$ un espace de Hilbert de dimension infinie et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ un opérateur compact. Supposons que T soit de Fredholm. Alors $Im(T)$ est fermée dans $\mathcal{H}'$ qui est complet donc $Im(T)$ est un espace de Hilbert.

$T : \mathcal{H} \rightarrow Im(T)$ est un opérateur continu et surjectif entre deux espaces de Banach. Or, d'après le Théorème de l'application ouverte, une application linéaire continue surjective entre deux espaces de Banach est ouverte, donc T est ouverte.

Soit $\mathcal{B}$ la boule unité ouverte de $\mathcal{H}$, alors $T(\mathcal{B})$ est un voisinage ouvert de 0 dans $Im(T)$. Il existe donc $r > 0$ tel que :

$$\mathcal{B}_{Im(T)}(0, r) \subset T(\mathcal{B}) \subset Im(T)$$

D'où :

$$\overline{\mathcal{B}_{Im(T)}(0, r)} \subset \overline{T(\mathcal{B})} \subset \overline{Im(T)} = Im(T)$$

T étant compact, $\overline{T(\mathcal{B})}$ est un compact de $\mathcal{H}$.

$\overline{\mathcal{B}_{Im(T)}(0, r)}$ est un fermé dans un compact, c'est donc un compact de $\mathcal{H}'$. On en déduit que la boule unité fermée est un compact de $Im(T)$. D'après le théorème de Riesz, $Im(T)$ est donc de dimension finie. $\mathcal{H}$ étant de dimension infinie Im donc $Im(T)$ est de codimension infinie. Il y a contradiction avec T de Fredholm $\square$.

4.2 Adjoint d'un opérateur de Fredholm.

Lemme 4.13 Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$. Alors $Im(T)$ est fermé si et seulement si $Im(T^*)$ est fermé.

Preuve :

1. si $Im(T)$ est fermé alors $Im(T)$ est complet car $\mathcal{H}'$ est de Hilbert. L'application $T|_{Ker(T)^\perp} : Ker(T)^\perp \rightarrow Im(T)$ est un isomorphisme d'espace de Hilbert. D'après le théorème des isomorphismes de Banach, $T|_{Ker(T)^\perp}$ est continue. Ainsi, par continuité de T^{-1} : il existe $k > 0$ tel que, pour tout $x \in Ker(T)^\perp$, $\|T(x)\| \geq k\|x\|$.
2. Supposons $Im(T)$ fermé, montrons que $Im(T^*)$ l'est aussi. Soit $(T^*(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente, montrons que sa limite appartient à $Im(T^*)$. On peut supposer que $T^*(x_n) \neq 0$, c'est à dire :

$$x_n \in Ker(T^*)^\perp = (Im(T)^\perp)^\perp = \overline{Im(T)}.$$

Or $Im(T)$ est fermé donc $x_n \in Im(T)$ et il existe $y_n \in Ker(T)^\perp$ tel que $x_n = T(y_n)$. Ainsi $T^*(x_n) = T^*T(y_n)$.

Nous allons montrer que (y_n) est de Cauchy.

$(T^*T(y_n))$ est convergente donc bornée : il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|T^*T(y_n)\| < C$.

D'une part : $\langle T^*T(y_n) | y_n \rangle \leq \|T^*T(y_n)\| \times \|y_n\| < C\|y_n\|$

D'autre part, d'après (*) :

$$\langle T^*T(y_n) | y_n \rangle = \langle T(y_n) | T(y_n) \rangle = \|T(y_n)\|^2 \geq k^2\|y_n\|^2$$

Il vient : $\|y_n\| \leq C' = \frac{C}{k^2}$ et (y_n) est bornée. On a :

$\langle T^*T(y_n - y_m) | y_n - y_m \rangle \geq k^2\|y_n - y_m\|^2$ et :

$\langle T^*T(y_n - y_m) | y_n - y_m \rangle \leq \|T^*T(y_n - y_m)\| \times \|y_n - y_m\| \leq C'\|T^*(x_n) - T^*(x_m)\|$

D'où $\|y_n - y_m\|^2 \leq \frac{C}{k^2}\|T^*(x_n) - T^*(x_m)\|$. $(T^*(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ étant une suite convergente, (y_n) est de Cauchy donc converge vers $y \in \mathcal{H}$. Par continuité, $T^*(x_n) = T^*T(y_n)$ converge vers $T^*(T(y)) \in Im(T^*)$ □

Proposition 4.14 *Soit T un opérateur de Fredholm, alors T^* est de Fredholm avec $Ind(T^*) = -Ind(T)$.*

Preuve : T un opérateur de Fredholm donc $Im(T)$ est fermé. D'après le lemme précédent, $Im(T^*)$ est également fermé.

$Im(T^*)^\perp = (Ker(T)^\perp)^\perp = Ker(T)$ est donc un supplémentaire orthogonal de $Im(T)$ dans $\mathcal{H}$ et $codim(Im(T^*)) = dim(Ker(T))$ est finie car T est de Fredholm.

De même, $Im(T)$ est fermé donc $Ker(T^*) = (Im(T))^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de $Im(T)$ dans $\mathcal{H}'$.

T étant de Fredholm, $codim(Im(T)) = dim(Ker(T^*))$ est de dimension finie.

Ainsi T^* est de Fredholm avec :

$$\begin{aligned} Ind(T^*) &= dim(Ker(T^*)) - codim(Im(T^*)) \\ &= codim(Im(T)) - dim(Ker(T)) = -Ind(T) \square \end{aligned}$$

Corollaire 4.15 *Un opérateur de Fredholm auto-adjoint est d'indice zéro.*

4.3 Propriétés de la fonction indice.

4.3.1 Préliminaire : Opérateurs inversibles.

Soient X et Y des espaces de Hilbert. Notons $GL(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés inversibles. Notons $\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble des opé-

rateurs linéaires bornés.

Nous allons montrer que $GL(X, Y)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(X, Y)$ pour la topologie engendrée par la norme d'opérateur.

Proposition 4.16 Soit $T \in GL(X, Y)$ et $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que $\|S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ alors $T + S \in GL(X, Y)$.

Preuve :

Soit $T \in GL(X, Y)$ et $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que $\|S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$.

1. $T + S$ est **injective** : soit $x \in X$ tel que $(T + S)(x) = 0$ alors :
 $S(x) = -T(x)$ et $\|S(x)\| = \|T(x)\| \leq \|S\| \times \|x\|$ Or $x = T^{-1}(T(x))$
d'où :

$$\|x\| \leq \|T^{-1}\| \times \|T(x)\| \text{ et } \frac{\|x\|}{\|T^{-1}\|} \leq \|T(x)\|.$$

Il vient : $\frac{\|x\|}{\|T^{-1}\|} \leq \|T(x)\| \leq \|S\| \times \|x\|$. Par conséquent :

$$0 \leq (\|S\| - \frac{1}{\|T^{-1}\|})\|x\| \leq 0 \text{ d'où } x = 0 \text{ car } \|S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}.$$

2. $T + S$ est **surjective** : soit $y \in Y$ alors :
 $T(x) + S(x) = y \iff x + T^{-1}(S(x)) = T^{-1}(y) \iff x = g(x)$ avec
 $g(x) = T^{-1}(y) - T^{-1}(S(x))$. Or, pour tout $x, z \in X$:
 $\|g(x) - g(z)\| = \|T^{-1}(S(z)) - T^{-1}(S(x))\|$
 $= \|(T^{-1} \circ S)(z - x)\| \leq \|T^{-1}\| \times \|S\| \times \|z - x\|.$
Or par hypothèse, $\|T^{-1}\| \times \|S\| < 1$. Donc g est contractante avec X
et Y des espaces de Banach, ainsi g possède un point fixe x . On en
conclut que $T + S$ est surjective. $\square$

Corollaire 4.17 $GL(X, Y)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(X, Y)$.

Preuve : Soit $T \in GL(X, Y)$ et $S \in \mathcal{B}(T, \frac{1}{\|T^{-1}\|})$. Alors $S = T + (S - T)$
avec $\|S - T\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$.

D'après la proposition précédente, on a donc $S \in GL(X, Y) \square$

4.3.2 Continuité - Petite perturbation en norme.

Nous allons montrer que non seulement l'ensemble des opérateurs de Fredholm entre deux espaces de Banach est ouvert dans l'ensemble des opérateurs bornés, mais aussi que l'indice est une application localement constante (donc continue).

Lemme 4.18 Soit $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ un opérateur de Fredholm surjectif. Alors il existe un voisinage de S dans lequel tout opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ est surjectif et satisfait $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Ker}(S))$.

Preuve : Posons $\mathcal{H}_0 = \text{Ker}(S)^\perp$ et soit l'inclusion $i_0 : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$. Soit $S_0 = S \circ i_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}')$, alors S_0 est inversible car :

1. injective : $S_0(x) = 0 \iff x \in \text{Ker}(S) \cap \text{Ker}(S)^\perp \iff x = 0$
2. surjective car S est supposée surjective

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ tel que $\|T - S\| < \frac{1}{\|S_0^{-1}\|}$.

Remarquons tout d'abord que $\text{Ker}(T) \cap \mathcal{H}_0 = \{0\}$. En effet : soit $x \in \mathcal{H}_0$, si $T(x) = 0$ alors $x = 0$ car T_0 est inversible.

Posons $T_0 = T \circ i_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}')$ Alors, $\|T_0 - S_0\| \leq \|T - S\| < \frac{1}{\|S_0^{-1}\|}$.

Donc, d'après la proposition 4.16, T_0 est inversible, notons T_0^{-1} son inverse. Posons $\phi_T = Id - i_0 \circ T_0^{-1} \circ T$ alors $\text{Im}(\phi_T) \subset \text{Ker}(T)$ donc $\phi_T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \text{Ker}(T))$ et $\phi_S = Id - i_0 \circ S_0^{-1} \circ S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \text{Ker}(S))$.

Considérons $\phi_T|_{\text{Ker}(S)} : \text{Ker}(S) \rightarrow \text{Ker}(T)$ et $\phi_S|_{\text{Ker}(T)} : \text{Ker}(T) \rightarrow \text{Ker}(S)$.

Soit $x \in \text{Ker}(T)$ alors $x \in \text{Ker}(S)$ et $\phi_S(x) = x$. Donc : $\phi_T(\phi_S(x)) = \phi_T(x) = x$.

Soit $x \in \text{Ker}(S)$:

1. si $x \in \text{Ker}(T)$ alors $\phi_T(x) = x$ et $\phi_S(\phi_T(x)) = \phi_S(x) = x$ car $x \in \text{Ker}(S)$.
2. si $x \notin \text{Ker}(T)$ alors $T_0^{-1}(T(x)) = \tilde{x}$ avec $\tilde{x} \in \mathcal{H}_0$ d'où : $\phi_S(x) = x - \tilde{x} - S_0^{-1}(S(x - \tilde{x})) = x - \tilde{x} + S_0^{-1}(S(\tilde{x})) = x - \tilde{x} + \tilde{x} = x$. Donc $\phi_S(\phi_T(x)) = x$

Ainsi $\phi_T|_{\text{Ker}(S)} : \text{Ker}(S) \rightarrow \text{Ker}(T)$ et $\phi_S|_{\text{Ker}(T)} : \text{Ker}(T) \rightarrow \text{Ker}(S)$ sont inverses l'une de l'autre et $\dim(\text{Ker}(S)) = \dim(\text{Ker}(T))$ T est surjectif car $T_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}')$ l'est $\square$

Lemme 4.19 Soit $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ un opérateur de Fredholm injectif. Alors il existe un voisinage de S dans lequel tout opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ est injectif et satisfait $\text{codim}(\text{Im}(T)) = \text{codim}(\text{Im}(S))$.

Preuve : Nous savons que $S^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ est également de Fredholm avec $\text{Im}(S^*) = \text{Ker}(S)^\perp = \mathcal{H}$. Donc S^* est surjectif et d'après le lemme précédent, il existe une boule centrée en S^* , de rayon $\varepsilon > 0$ tel que tout $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ dans cette boule est surjectif. Ainsi :

$$Ker(U^*) = (Im(U))^\perp = \{0\}$$

. Donc $U^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ est injectif. Par ailleurs, d'après le lemme précédent $dim(Ker(S^*)) = dim(Ker(U))$ donc $dim(Im(S)^\perp) = dim(Im(U^*)^\perp)$, c'est à dire $codim(Im(S)) = codim(Im(U^*))$. Or :

$$\|S - U^*\| = \|(S - U^*)^*\| = \|S^* - U\| < \varepsilon.$$

Posons $T = U^*$. Ainsi, il existe un voisinage de S dans lequel tout opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ est injectif et satisfait $codim(Im(T)) = codim(Im(S))$ □

Lemme 4.20 Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ un opérateur de Fredholm et soit $V \subset \mathcal{H}$ un sous-espace fermé tel que la restriction de T à V soit injective. Posons :

$$\overline{T} : \mathcal{H}/V \rightarrow \mathcal{H}'/T(V)$$

telle que, pour tout $x \in \mathcal{H}/V$, $\overline{T}(\overline{x}) = T(x)$.

$$\text{Alors : } Ind(T) = Ind(\overline{T}).$$

Preuve :

Rappelons la propriété universelle universelle de l'espace quotient : Soit $f : E \rightarrow G$ une application linéaire et V un sous espace fermé de E inclus dans $Ker(f)$. Alors il existe une unique application linéaire $g : \frac{E}{V} \rightarrow G$ telle que $f = g \circ p$ où $p : E \rightarrow \frac{E}{V}$ surjection canonique associée. De plus $Ker(g) = p(Ker(f))$.

Soit V un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ alors $\mathcal{H}/V$ est un espace de Hilbert. T étant de Fredholm, $T(V)$ est également un sous espace fermé de $\mathcal{H}'$. Donc $\mathcal{H}'/T(V)$ est aussi un espace de Hilbert. Considérons $p' : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}/V$ et $p' : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}'/T(V)$ les surjections canoniques associées.

Soit $f = p' \circ T$, alors f s'annule sur V car si $x \in V$ alors $T(x) \in T(V)$ et $p'(T(x)) = 0$. D'où $V \subset Ker(f)$.

Appliquons la propriété universelle à f : il existe une unique application linéaire $\overline{T} : \mathcal{H}/V \rightarrow \mathcal{H}'/T(V)$ telle que $f = \overline{T} \circ p$.

$$Ker(f) = \{x \in \mathcal{H}, T(x) \in T(V)\} = \{x \in \mathcal{H}, \exists y \in V, T(x) = T(y)\}$$

$$Ker(f) = \{x \in \mathcal{H}, \exists y \in V, x - y \in Ker(T)\} = V + Ker(T)$$

$$\text{Ainsi : } Ker(\overline{T}) = p(Ker(f)) = p(V + Ker(T)) = p(Ker(T)).$$

Soit : $p|_{Ker(T)}: Ker(T) \rightarrow p(Ker(T))$ alors p est surjective et injective car : soit $x \in Ker(T)$, $P(x) = 0 \iff x \in V \cap Ker(T) = \{0\}$. D'où : $Ker(T) \simeq p(Ker(T)) = Ker(\bar{T})$. T étant de Fredholm, $Ker(\bar{T})$ est de dimension finie avec $dim(Ker(T)) = dim(Ker(\bar{T}))$.

$Coker(T) = \mathcal{H}'/T(\mathcal{H}) \simeq (\mathcal{H}'/T(V))/(T(\mathcal{H})/T(V))$ car $T(V)$ est un sous espace vectoriel de $T(\mathcal{H})$. Or $Im(\bar{T}) = T(\mathcal{H})/T(V)$ d'où : $Coker(\bar{T}) = (\mathcal{H}'/T(V))/(T(\mathcal{H})/T(V)) \simeq Coker(T)$. T étant de Fredholm, $Im(\bar{T})$ est donc de codimension finie avec $codim(Im(T)) = codim(Im(\bar{T}))$.

On en conclut que $\bar{T}$ est de Fredholm et que $Ind(T) = Ind(\bar{T}) \square$

Théorème 4.21 Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ des espaces de Hilbert. Notons $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ l'ensemble des opérateurs de Fredholm. Alors :

1. $\mathcal{F}$ est ouvert dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$.
2. L'application $Ind : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{Z}$ est localement constante.

Preuve : Soit $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ de Fredholm. Posons $\mathcal{H}_0 = Ker(S)^\perp$. Alors :

1. $S(\mathcal{H}) = S(\mathcal{H}_0)$ donc $Coker(S) = Coker(S_0)$ et :

$$codim(Im(S_0)) = codim(Im(S)).$$

2. $S_0 : \mathcal{H}_0 \rightarrow Im(S)$ est inversible, notons S_0^{-1} son inverse.

Nous allons montrer que tout opérateur $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ tel que $\|S - T\| \leq \frac{1}{\|S_0^{-1}\|}$ est de Fredholm et vérifie $Ind(T) = Ind(S)$.

Soit $T|_{\mathcal{H}_0} : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}'$, alors : $\|S_0 - T|_{\mathcal{H}_0}\| \leq \|S - T\| \leq \frac{1}{\|S_0^{-1}\|}$. Donc, d'après le lemme 4.19, $T|_{\mathcal{H}_0}$ est injectif et vérifie :

$$codim(Im(T|_{\mathcal{H}_0})) = codim(Im(S_0)) = codim(Im(S))$$

$\mathcal{H}_0 = Ker(S)^\perp$ est un sous espace fermé de $\mathcal{H}$ donc, d'après le lemme 4.20 précédent :

$$\bar{T} : \mathcal{H}/\mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}'/T(\mathcal{H}_0)$$

vérifie $Ind(\bar{T}) = Ind(T)$. Or $\mathcal{H}/\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}'/T(\mathcal{H}_0)$ sont de dimension finie donc, d'après la Proposition 4.8 :

$$\begin{aligned} Ind(\bar{T}) &= dim(\mathcal{H}/\mathcal{H}_0) - dim(\mathcal{H}'/T(\mathcal{H}_0)) \\ &= dim(Ker(S)) - codim(Im(T|_{\mathcal{H}_0})) \end{aligned}$$

Il vient : $Ind(\bar{T}) = Ind(T) = dim(Ker(S)) - codim(Im(S)) = Ind(S) \square$

Remarque 4.22 On en déduit que sous l'effet d'une petite perturbation en norme dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$, un opérateur de Fredholm reste de Fredholm et de même indice.

Corollaire 4.23 Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ des espaces de Hilbert. Notons $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ l'ensemble des opérateurs de Fredholm. L'application $\text{Ind} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{Z}$ est **continue**.

Corollaire 4.24 Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ des espaces de Hilbert. Notons $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ l'ensemble des opérateurs de Fredholm.

L'application $\text{Ind} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{Z}$ est **constante sur les composantes connexes** de $\mathcal{F}$. En particulier, s'il existe un chemin reliant S et T alors S et T appartiennent à la même composante connexe et : $\text{Ind}(S) = \text{Ind}(T)$.

Preuve : Ind étant localement constante sur $\mathcal{F}$, elle est constante sur les composantes connexes de $\mathcal{F}$ $\square$

Exemple 4.25 Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ de rang fini. Alors $\text{id}_{\mathcal{H}} - T$ est de Fredholm avec $\text{Ind}(\text{id}_{\mathcal{H}} - T) = 0$

Preuve :

1. $\text{Ker}(T - \text{id}_{\mathcal{H}}) \subset \text{Im}(T)$ est de dimension finie $\text{Ker}(T) \subset \text{Im}(T - \text{id}_{\mathcal{H}})$
2. Soit $x \in \text{Ker}(T)$ alors $x = x - T(x)$ donc $\text{Ker}(T) \subset \text{Im}(T - \text{id}_{\mathcal{H}})$. Or $\mathcal{H}/\text{Ker}(T) \simeq \text{Im}(T)$ donc $\text{Ker}(T)$ est de codimension finie.

$T - \text{id}_{\mathcal{H}}$ est donc de Fredholm. Par ailleurs, considérons $\phi : [0; 1] \rightarrow \mathcal{F}$ continu défini par $\phi(t) = \text{id}_{\mathcal{H}} - tT$. Alors $\phi(0) = \text{id}$ et $\phi(1) = \text{id}_{\mathcal{H}} - T$. D'après le corollaire précédent, on a donc $\text{Ind}(\text{id}_{\mathcal{H}} - T) = \text{Ind}(\text{id}_{\mathcal{H}}) = 0 \square$

4.3.3 Additivité.

Une propriété intéressante de l'indice est que l'indice d'une composition d'opérateurs de Fredholm est la somme des indices des composants.

Proposition 4.26 Soient T et S des opérateurs de Fredholm, respectivement de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}'$ et de $\mathcal{H}'$ dans $\mathcal{H}''$. Alors TS est de Fredholm avec :

$$\text{Ind}(TS) = \text{Ind}(T) + \text{Ind}(S)$$

Preuve :

1. Considérons $\tilde{T}$ la restriction de T à $\text{Ker}(ST)$. Alors $\text{Im}(\tilde{T}) \subset \text{Ker}(S)$ et $\text{Ker}(\tilde{T}) \subset \text{Ker}(T)$. Or S et T sont de Fredholm donc $\text{Ker}(S)$ et $\text{Ker}(\tilde{T})$ sont de dimension finie. Par le théorème du rang :

$$\dim(\text{Ker}(ST)) = \dim(\text{Im}(\tilde{T})) + \dim(\text{Ker}(\tilde{T})) \leq \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Ker}(S))$$
De la même façon, on montre que : $\text{codim}(ST) \leq \text{codim}(S) + \text{codim}(T)$.
 ST est donc de Fredholm.
2. Rappelons tout d'abord que si H_1 et H_2 sont deux espaces de Hilbert, on peut définir la somme directe : $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2\}$. Il s'agit d'un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle (x_1, x_2); (y_1, y_2) \rangle = \langle x_1; y_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle x_2; y_2 \rangle_{\mathcal{H}_2}.$$

3. Soit $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$. Considérons l'opérateur $\phi(t) : \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'' \oplus \mathcal{H}'$ défini par :

$$\phi(t)(y, x) = (\cos(t)S(y) - \sin(t)ST(x); \sin(t)y + \cos(t)T(y))$$
Alors $\phi(t) = \tilde{S} \circ u_t \circ \tilde{T}$ avec :

$$(a) \quad \tilde{T} : \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}' \text{ tel que : } \tilde{T}(y, x) = (y, T(x))$$

$$(b) \quad u_t : \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}' \text{ tel que :}$$

$$u_t(y, z) = (\cos(t)y - \sin(t)z, \sin(t)y + \cos(t)z)$$

$$(c) \quad \tilde{S} : \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}'' \oplus \mathcal{H}' \text{ tel que } \tilde{S}(x, y) = (S(x), y)$$

$\phi(t)$ est donc de Fredholm comme composée d'opérateurs de Fredholm.

4. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des opérateurs de Fredholm de $\mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}'' \oplus \mathcal{H}'$ alors ϕ est un chemin reliant $\phi(0)$ à $\phi(\pi)$. D'après le Corollaire 4.24, on a donc : $\text{Ind}(\phi(0)) = \text{Ind}(\phi(\frac{\pi}{2}))$.

$$(a) \quad \phi(0)(y, x) = (S(y); T(y)). \text{ On a donc } \text{Ker}(\phi(0)) = \text{Ker}(S) \oplus \text{Ker}(T) \\ \text{et } \dim(\text{Ker}(\phi(0))) = \dim(\text{Ker}(S)) + \dim(\text{Ker}(T)). \text{ De même :} \\ \text{codim}(\phi(0)) = \text{codim}(S) + \text{codim}(T). \text{ D'où :} \\ \text{Ind}(\phi(0)) = \text{Ind}(S) + \text{Ind}(T)$$

$$(b) \quad \phi(\frac{\pi}{2})(y, x) = (-ST(x); y) \text{ donc } \text{Ind}(\phi(\frac{\pi}{2})) = \text{Ind}(ST)$$

$$\text{Ainsi : } \text{Ind}(ST) = \text{Ind}(S) + \text{Ind}(T) \quad \square$$

Exemple 4.27 Revenons sur l'exemple de T_d et T_g les translations respectivement à droite et à gauche dans l^2 . Nous avons prouvé dans l'exemple 4.5 que $\text{Ind}(T_g) = -1$ et que $\text{Ind}(T_d) = 1$.

1. D'après la propriété précédente, pour tout $n \geq 2$, $T_g^n = T_g \circ \dots \circ T_g$ est de Fredholm avec $\text{Ind}(T_g^n) = -n < 0$.
De même pour tout $n \geq 2$, $T_d^n = T_d \circ \dots \circ T_d$ est de Fredholm avec $\text{Ind}(T_d^n) = n > 0$.
2. $T_d \circ T_g$ est d'indice $\text{Ind}(T_g) + \text{Ind}(T_d) = -1 + 1 = 0$. Ce qui était prévisible car $T_g \circ T_d = \text{id}_{l^2}$ et id_{l^2} est bijective donc d'indice nul.

Pour tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, il existe donc un opérateur de Fredholm d'indice n . Nous savons comment l'obtenir.

4.4 Perturbation par un opérateur compact.

Rappelons que $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ est un opérateur compact s'il est limite d'opérateurs de rang fini (pour la norme d'opérateur, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ étant des espaces de Hilbert).

Dans la suite, les opérateurs compacts vont jouer le rôle de "perturbations" : si K est un opérateur compact et T un opérateur quelconque, $T + K$ sera considéré comme une petite perturbation de T .

Nous allons montrer que les perturbations par des opérateurs compacts n'ont pas d'influence sur les opérateurs de Fredholm, c'est-à-dire que si l'on somme un opérateur de Fredholm et un opérateur compact, le résultat reste de Fredholm et l'indice demeure inchangé.

Lemme 4.28 Soit $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ un opérateur compact alors $\text{Ker}(1 - S)$ est de dimension finie

Preuve : Pour tout $x \in \text{Ker}(1 - S)$, on a $x = S(x)$. L'opérateur identité est donc compact sur $\text{Ker}(1 - S)$. La boule unité fermée de $\text{Ker}(1 - S)$ est donc compacte. D'après le théorème de Riez, on en conclut que $\text{Ker}(1 - S)$ est de dimension finie $\square$.

Lemme 4.29 Soit $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ un opérateur compact alors $\text{Im}(1 - S)$ est fermé de codimension finie.

Preuve : L'ensemble des opérateurs de rang fini étant dense dans l'ensemble des opérateurs compacts, il existe un opérateur F de rang fini tel que $\|S - F\| < 1$. Alors $1 - (S - F)$ est inversible avec :

$$\begin{aligned} \text{Im}(1 - S) &= \text{Im}((1 - (S - F) - F)(1 - (S - F))^{-1}) = \\ &= \text{Im}(1 - F(1 - (S - F))^{-1}) = \text{Im}(1 - F'') \end{aligned}$$

F étant de rang fini, il en est de même pour l'opérateur $F' = F(1 - (S - F))^{-1}$.

Soit $W = \text{Ker}(F')$. On sait que W est fermé et que $\text{Im}(F') \simeq \mathcal{H}/W$ est de dimension finie donc W est un fermé de codimension finie.

$$\text{Im}(1 - S) = \text{Im}(1 - F'') \supset (1 - F')(W) = W$$

Or un sous espace d'un espace de Hilbert est fermé de codimension finie s'il contient un sous espace fermé de codimension finie. Donc $\text{Im}(1 - S)$ est bien fermé de codimension finie. $\square$

Lemme 4.30 Soient $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ un opérateur de Fredholm et $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ un opérateur compact alors $\text{Ker}(T + S)$ est de dimension finie et $\text{Im}(T + S)$ est fermé de codimension finie.

Preuve : Soit T un opérateur de Fredholm et S un opérateur compact.

$\text{Ker}(T)$ étant de dimension finie, il existe un sous-espace $V \subset \mathcal{H}$ fermé de codimension finie tel que $\text{Ker}(T) \cap V = \{0\}$. Soient :

1. P le projecteur de $\mathcal{H}$ sur V .
2. P' le projecteur de $\mathcal{H}'$ sur $T(V)$.
3. $T' : T(V) \rightarrow V$ l'inverse de $T_V : V \rightarrow T(V)$

Alors :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(S + T) \cap V &\subset \text{Ker}(P'(S + T)P) \\ &\subset \text{Ker}T'(P'(S + T)P) = \text{Ker}(P + T'P'SP) = \text{Ker}(1 - S') \end{aligned}$$

Avec $S' = 1 - P - T'P'SP$. Or $1 - P$ est de rang fini (car V est de codimension finie) et $T'P'SP$ est compact (car S est compact) donc S' est compact. D'après le lemme 4.28, $\text{Ker}(1 + S')$ est de dimension finie.

$\text{Ker}(S + T) \cap V$ est donc de dimension finie. V étant de codimension finie, $\text{Ker}(S + T)$ est donc de dimension finie .

Par ailleurs :

$$\text{Im}(T + S) \supset \text{Im}((T + S)T'P') = \text{Im}(P' + ST'P') = \text{Im}(1 - S'')$$

avec $S'' = (1 - P') - ST'P'$.

Or $1 - P'$ est de rang fini (car $T(V) \subset \text{Im}(T)$ est de codimension finie) et

$ST'P'$ est compact (car S est compact) donc S'' est compact.
D'après le lemme 4.29, $Im(1 - S'')$ est fermé et de codimension finie, or un sous espace d'un espace de Hilbert est fermé de codimension finie s'il contient un sous espace fermé de codimension finie, donc $Im(T + S)$ est fermé de codimension finie $\square$.

Théorème 4.31 Soient $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ avec T de Fredholm et S compact, alors $T + S$ est de Fredholm et :

$$Ind(T + S) = Ind(T).$$

Preuve :

1. Nous savons déjà que $Ker(S + T)$ est de dimension finie et que $Im(S + T)$ est fermé de codimension finie. Donc $T + S$ est de Fredholm.
2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $T + tS$ est de Fredholm. D'après le Corollaire 4.24, on a donc $Ind(T + 0S) = Ind(T + 1S)$, c'est à dire :

$$Ind(T) = Ind(T + S) \square$$

Proposition 4.32 Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ un opérateur de Fredholm. Alors, il y a équivalence entre :

1. $Ind(T) = 0$
2. Il existe un opérateur $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ de rang fini tel que $T + K$ soit inversible.

Preuve :

Supposons qu'il existe un opérateur $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ de rang fini tel que $T + K$ soit inversible. On sait que tout opérateur de rang fini est compact, donc K est compact et, d'après le Théorème 4.31, $T + K$ est de Fredholm avec : $Ind(T + K) = Ind(T)$. Or $T + K$ est inversible donc $Ind(T + K) = 0$. Il vient : $Ind(T) = 0$.

Réciproquement, supposons que $Ind(T) = 0$. Alors :

$$dim(Ker(T)) = codim(Im(T)) = dim(Im(T)^\perp).$$

Il existe donc un isomorphisme $\psi : Ker(T) \rightarrow Im(T)^\perp$. Notons P la projection orthogonale de $\mathcal{H}$ sur $Ker(T)^\perp$ et posons $K = \psi \circ (Id_{\mathcal{H}} - P)$. Alors $Im(K) = Im(T)^\perp$. Or $Im(T)^\perp$ est de dimension finie car T est de Fredholm donc K est de rang fini. Reste à montrer que $T + K$ est inversible.

1. Soit $x \in \mathcal{H}$ tel que $(T + K)(x) = T(x) + \psi \circ (Id_{\mathcal{H}} - P)(x) = 0$ alors $T(x) = 0$ et $\psi \circ (Id_{\mathcal{H}} - P)(x) = 0$ car $\mathcal{H}' = Im(T) \oplus Im(T)^\perp$.
Il vient : $x \in Ker(T)$ et $P(x) = x$ (car ψ bijective). Donc :

$$x \in Ker(T) \cap Ker(T)^\perp = \{0\}.$$

D'où l'injectivité.

2. K est de rang fini donc compact. Ainsi : $Ind(T + K) = Ind(T) = 0$. Or $dim(Ker(T + K)) = 0$ car $T + K$ est injective.
Donc $0 = codim(Im(T + K))$. D'où la surjectivité. $\square$

4.5 Inversibilité modulo un compact.

Si $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est de Fredholm alors $\mathcal{H} = Ker(T)^\perp \oplus Ker(T)$ et $\mathcal{H}' = Im(T) \oplus Im(T)^\perp$.

Soit $\tilde{T} : Ker(T)^\perp \rightarrow Im(T)$ la restriction de T à $Ker(T)^\perp$. Alors $\tilde{T}$ est inversible. $Ker(T)$ et $Im(T)^\perp$ étant de dimension finie, nous pouvons considérer que T est "presque" inversible.

En fait, nous allons montrer qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est de Fredholm si et seulement il est inversible modulo un opérateur compact. C'est à dire : s'il existe $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ des opérateurs compacts tels que $TS = I + K_1$ et $ST = I + K_2$.

Définition 4.33 Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Désignons par $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs compacts de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. Nous savons que $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Par conséquent, le quotient $\mathcal{Q}(\mathcal{H}) := \mathcal{L}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ est une C^* algèbre. On l'appelle l'**algèbre de Calkin**.
Si $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, on notera $\pi(T)$ son image dans $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$.

Théorème 4.34 (Théorème d'Atkinson) $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est de Fredholm si et seulement si son projeté dans l'algèbre de Calkin est inversible.

Preuve :

Soit T de Fredholm. Alors, d'après la Proposition 4.10, $Im(T)$ est fermé. Notons $\tilde{T}$ la restriction de T à $Ker(T)^\perp$ alors $\tilde{T}$ est un opérateur inversible de $Ker(T)^\perp$ dans $Im(T)$. Notons $\tilde{S} = \tilde{T}^{-1}$. Soit S le prolongement de $\tilde{S}$ tel que $S(x) = 0$ si $x \in Im(T)^\perp$. Soit $x = x_{Ker(T)} + x_{Ker(T)^\perp} \in \mathcal{H}$ et $y = y_{Im(T)} + y_{Im(T)^\perp} \in \mathcal{H}'$ alors :

1. $(I - ST)(x) = x - S(T(x)) = x - \tilde{S}(T(x_{Ker(T)^\perp})) = x - x_{Ker(T)^\perp} = x_{Ker(T)}$ donc $I - ST$ est la projection orthogonale sur $Ker(T)$.

2. $(I - TS)(y) = y - T(\tilde{S}(y_{Im(T)})) = y - y_{Im(T)} = y_{Im(T)^\perp}$ donc $I - TS$ est la projection orthogonale sur $Im(T)^\perp$.

Or T étant de Fredholm, $Ker(T)$ et $Im(T)^\perp$ sont de dimension finie. Les opérateurs $I - ST$ et $I - TS$ étant de rang fini, ils sont donc compacts. On en déduit que :

$$\pi(T)\pi(S) = \pi(S)\pi(T) = \pi(I)$$

$\pi(T)$ est donc inversible dans $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$, d'inverse $\pi(S)$.

Réciproquement, supposons que $\pi(T)$ est inversible, d'inverse $\pi(S)$. Alors il existe deux opérateurs compacts K_1 et K_2 tels que $ST = I + K_1$ et $TS = I + K_2$. L'ensemble des opérateurs bornés étant dense dans l'ensemble des opérateurs compacts, il existe deux opérateurs F_1 et F_2 de rang fini tels que $\|K_1 - F_1\| < 1$ et $\|K_2 - F_2\| < 1$.

Or, dans une algèbre de Banach unitaire, si un élément a vérifie $\|1 - a\| < 1$ alors a est inversible. Ainsi, $I + K_1 - F_1$ est inversible et on a :

$$(I - F_1 + K_1)^{-1}ST = (I - F_1 + K_1)^{-1}(I + K_1) = (I - F_1 + K_1)^{-1}(I - F_1 + K_1 + F_1) = I + (I - F_1 + K_1)^{-1}F_1$$

Or $F_1 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ donc $(I - F_1 + K_1)^{-1}F_1 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Posons $U = (I - F_1 + K_1)^{-1}S$ et $F_3 = (I - F_1 + K_1)^{-1}F_1$ alors F_3 est de rang fini et $UT = I + F_3$.

$Ker(T) \subset Ker(UT)$. Or $Ker(UT) = \{x \in \mathcal{H}, x = F_3(-x)\} \subset Im(F_3)$. Donc $Ker(T)$ est de dimension finie.

Le même raisonnement avec F_2 et K_2 montre qu'il existe V et F_4 de rang fini tels que $TV = I + F_4$. Or $Im(I + F_4) = Im(TV) \subset Im(T)$. F_4 étant de rang fini, $Im(I + F_4)$ est de codimension finie, donc $Im(T)$ est également de codimension finie.

Ainsi, T est de Fredholm $\square$

Le théorème d'Atkinson se reformule ainsi :

Corollaire 4.35 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est de Fredholm si et seulement si il existe $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $ST - id_{\mathcal{H}}$ et $TS - id_{\mathcal{H}}$ sont compacts.

Remarque 4.36 La preuve du théorème d'Atkinson nous montre plus précisément que :

$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est de Fredholm si et seulement si il existe $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $ST - id_{\mathcal{H}}$ et $TS - id_{\mathcal{H}}$ sont de rang fini.

Remarque 4.37 Ce résultat se généralise au cas où $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ où $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont des espaces de Hilbert séparables de dimension infinie.

En effet, nous savons que tous les espaces de Hilbert séparables et de dimension infinie sont isomorphes à $l^2(\mathbb{N})$ (donc isomorphes entre eux). Il existe donc un isomorphisme $\psi : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$. Posons $\tilde{T} = \psi \circ T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Alors $\tilde{T}$ est de Fredholm. On peut ensuite appliquer le corollaire précédent à $\tilde{T}$.

Corollaire 4.38 Si $f \in C(S^1, \mathbb{C}^*)$ alors l'opérateur de Toeplitz T_f est de Fredholm.

Preuve : D'après le corollaire 3.10 : si $f, g \in C(S^1)$ alors $T_f T_g = T_{fg} + K$ où K est un opérateur compact. Supposons que $f \in C(S^1)$ ne s'annule jamais. Alors $g = \frac{1}{f} \in C(S^1)$ et $T_f T_g = T_{id_{S^1}} + K = id_{\mathcal{H}} + K$ où K est un opérateur compact. D'après le théorème d'Atkinson, T_f est alors un opérateur de Fredholm $\square$

5 L'indice des opérateurs de Toeplitz classiques.

Nous venons de prouver que si $f \in C(S^1, \mathbb{C}^*)$ alors l'opérateur de Toeplitz T_f est de Fredholm. Mais quel est son indice? Nous allons montrer que ce dernier est entièrement déterminé par l'indice du lacet associé à f .

5.1 Notations.

On note $\mathcal{C}$ la $\mathbb{C}$ - algèbre des fonctions continues de S^1 dans $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{C}$ est **inversible** si elle ne s'annule pas sur S^1 . Si f est une fonction de S^1 dans $\mathbb{C}$, on lui associe le lacet $\tilde{f} : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ défini par :

$$\forall t \in [0; 1], \tilde{f}(t) = f(e^{2\pi i t})$$

On identifiera deux fonctions f et g de S^1 dans $\mathbb{C}$ telles que les fonctions $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont mesurables au sens de Lebesgue et coïncident sur le complémentaire d'une partie négligeable de $[0; 1]$.

On note L^1 (resp. L^2) l'ensemble des fonctions f de S^1 dans $\mathbb{C}$ telles que $\tilde{f}$ est intégrale (resp. de carré intégrable) au sens de Lebesgue sur $[-\pi; \pi]$.

Pour $f \in L^1$, on a :

$$\int_{S^1} f = \int_0^1 \tilde{f} = \int_0^1 f(e^{2\pi i t}) dt$$

5.2 Théorème de l'indice.

Nous savons que si $f \in C(S^1, \mathbb{C}^*)$ alors l'opérateur de Toeplitz $T_f \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ (ie : est de Fredholm sur l'espace de Hardy).

Théorème 5.1 *Théorème de l'indice* : $f \in C(S^1, \mathbb{C}^*)$ alors l'opérateur de Toeplitz T_f est de Fredholm. De plus, son indice est égal à l'opposé de l'indice du lacet $\tilde{f}$ par rapport à 0 :

$$Ind(T_f) = -Ind_{\tilde{f},0}$$

Preuve : Notons $n = Ind_{\tilde{f},0}$. D'après le Corollaire 2.19, $\tilde{f}$ est homotope au lacet défini par $\gamma_n(t) = e^{2\pi i n t}$ et $Ind_{\tilde{f},0} = Ind_{\gamma_n,0}$.

Soit $f_n \in C(S^1, \mathbb{C}^*)$ définie par $f_n(z) = z^n$. Alors $\tilde{f}_n = \gamma_n$. f et f_n sont donc homotopes. La fonction $Ind : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{Z}$ étant constante sur les composantes connexes de $\mathcal{F}$, on a donc $Ind(T_f) = Ind(T_{f_n})$. Pour tout $g \in \mathcal{H}$, $T_{f_n}(g) = P(z^n g)$ où P est la projection orthogonale de $L^2(S^1)$ sur l'espace de Hardy $\mathcal{H}$.

Par définition de $\mathcal{H}$: si $z = e^{i\theta}$ alors $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ki\theta}$ où $\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ki\theta}$ converge pour la norme sur $\mathcal{H}$. D'où : $z^n g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{(k+n)i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{(k+n)i\theta}$.

$$\text{Ainsi : } T_{f_n}(g)(z) = \begin{cases} \sum_{k=n}^{\infty} c_{k-n} e^{ki\theta} & \text{si } n \geq 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} c_{k-n} e^{ki\theta} & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

1. Si $n \geq 0$ alors $Ker(T_{f_n}) = \{0\}$ et $Im(T_{f_n}) = Vect(e^k, k \geq n)$. D'où : $Ind(T_{f_n}) = \dim(Ker(T_{f_n})) - \text{codim}(Im(T_{f_n})) = 0 - n = -n$
2. Si $n < 0$ alors $Ker(T_{f_n}) = \{g \in \mathcal{H}, c_k = 0, \forall k \geq -n\} = Vect(e_0, \dots, e_{-n-1})$ et $Im(T_{f_n}) = \mathcal{H}$. D'où :

$$Ind(T_{f_n}) = \dim(Ker(T_{f_n})) - \text{codim}(Im(T_{f_n})) = -n - 0 = -n$$

Ainsi : $Ind(T_f) = Ind(T_{f_n}) = -Ind_{\tilde{f},0} \quad \square$

Remarque 5.2 Nous avons prouvé dans la démonstration précédente que $Ind(T_f) = -Ind_{\gamma,0}$ pour tout lacet γ homotope à $\tilde{f}$. Pour calculer $Ind(T_f)$ on peut donc choisir n'importe quel lacet homotope à $\tilde{f}$.

Corollaire 5.3 Soit $f \in C(S^1, \mathbb{C}^*)$ différentiable par morceaux, alors l'opérateur de Toeplitz T_f est de Fredholm avec :

$$\text{Ind}(T_f) = \frac{-1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f'(e^{2\pi i t})}{f(e^{2\pi i t})} dt$$

Preuve : D'après le Théorème 5.1 : $\text{Ind}(T_f) = -\text{Ind}_{\tilde{f},0}$. Or, d'après, le Théorème 2.16, $\tilde{f}$ étant différentiable par morceaux : $\text{Ind}_{\tilde{f},0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{f}} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f'(e^{2\pi i t})}{f(e^{2\pi i t})} dt \square$

5.3 Autre formule : opérateurs traçables

Notons $\mathcal{H} = L^2(S^1, dt)$ et $\mathcal{H}^2$ l'espace de Hardy. Soit $F = 2P - 1$ où P désigne la projection de $\mathcal{H} = L^2(S^1, dt)$ sur $\mathcal{H}^2$. Alors F est un opérateur unitaire et autoadjoint satisfaisant $F^2 = 1$. $l^1(\mathcal{H})$ désigne l'ensemble des opérateurs traçables (les opérateurs compacts T tels que $\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(T) < +\infty$ où $\mu_n(T)$ est valeur propre de $|T|$). Nous noterons $\mathcal{C} = \mathcal{C}(S^1, \mathbb{C})$.

On rappelle que :

1. $l^1(\mathcal{H})$ est un idéal bilatère stable par passage à l'adjoint.
2. $l^1(\mathcal{H})$ est une algèbre de Banach pour $\|T\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(T)$ et si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ alors : $\|TA\|_{op} \leq \|T\|_1 \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$.
3. Pour tout $T \in l^1(\mathcal{H})$, $\text{Tr}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle T(e_n), e_n \rangle$ est indépendant de la base orthonormale $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ choisie.
4. si $S, T \in l^1(\mathcal{H})$ alors $\text{Tr}(S + T) = \text{Tr}(S) + \text{Tr}(T)$, $\text{Tr}(ST) = \text{Tr}(TS)$ et $\text{Tr}(\lambda S) = \lambda \text{Tr}(S)$
5. Tr est une forme linéaire continue définie positive sur $l^1(\mathcal{H})$ avec :

$$|\text{Tr}(S)| \leq \|S\|_1$$

On définit le commutateur par :

$$[S, T] = ST - TS.$$

Définition 5.4 Pour tout $f \in \mathcal{C}$, posons $df = [F, m_f]$ où

$$m_f : L^2(S^1, dt) \rightarrow L^2(S^1, dt) \text{ est définie par } m_f(g) = fg.$$

Proposition 5.5 Si $f, g \in \mathcal{C}$ alors :

1. $d(f + g) = df + dg$
2. si $\lambda \in \mathbb{C}$ alors $d(\lambda f) = \lambda df$
3. $d(fg) = (df)m_g + m_f dg$.

Preuve :

1. $d(f + g) = [F, m_{f+g}] = [F, m_f + m_g] = [F, m_f] + [F, m_g] = df + dg$
2. $d(\lambda f) = [F, m_{\lambda f}] = [F, \lambda m_f] = \lambda [F, m_f] = \lambda df$
3. $d(fg) = [F, m_{fg}] = [F, m_f m_g] = F m_f m_g - m_f m_g F = F m_f m_g - m_f F m_g + m_f F m_g - m_f m_g F = (df)m_g + m_f dg \square$

Définition 5.6 Nous noterons $\mathcal{C}_0$ l'ensemble des $f \in \mathcal{C}$ tels que $df \in l^1(\mathcal{H})$.

Proposition 5.7 Si $f \in \mathcal{C}_0$ alors $f^{-1} \in \mathcal{C}_0$ et $d(f^{-1}) = -m_{f^{-1}}(df)m_{f^{-1}}$.

Preuve : $d(f^{-1}f) = d(1) = 0 = (df^{-1})m_f + m_{f^{-1}}(df)$ d'où $d(f^{-1}) = -m_{f^{-1}}(df)m_{f^{-1}}$. Or $l^1(\mathcal{H})$ est un idéal bilatère donc $f^{-1} \in \mathcal{C}_0 \square$.

Lemme 5.8 Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la base orthonormée de $L^2(S^1, dt)$ définie par $e_n = z^n$. Si $m \in \mathbb{N}^*$ alors $d(z^m)$ est de rang m et :

$$d(z^m)(e_n) = \begin{cases} 2e_{n+m} & \text{si } n \in \{-1; -2; \dots; -m\} \\ 0 & \text{si sinon} \end{cases}$$

Preuve : Soit $m \in \mathbb{N}$ alors $d(e_m) = Fm_{e_m} - m_{e_m}F$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$ alors $d(e_m)(e_n) = Fe_me_n - e_mFe_n = Fe_{m+n} - e_mFe_n$.

1. Si $n \geq 1$ alors $Fe_n = e_n$ car $e_n \in \mathcal{H}^2$. Alors :

$$d(e_m)(e_n) = e_{m+n} - e_{m+n} = 0$$

2. Si $n \leq -1 - m$ alors $n + m \leq -1$ et :

$$Fe_{m+n} = -e_{m+n} \text{ car } e_{m+n} \in (\mathcal{H}^2)^\perp.$$

$$\text{De plus } Fe_n = -e_n. \text{ Alors : } d(e_m)(e_n) = -e_{m+n} - (-e_{m+n}) = 0$$

3. Si $n \in \{-1; -2; \dots; -m\}$ alors $n + m \geq 0$ et $Fe_{m+n} = e_{m+n}$.

Il vient : $d(e_m)(e_n) = e_{m+n} - (-e_{m+n}) = 2e_{m+n}$

Donc $d(z^m)$ est de rang m . $\square$

Corollaire 5.9 Soit $f \in \mathcal{C}$ alors df est de rang fini si et seulement si f est un polynôme de Laurent.

Preuve : Soit $f \in \mathcal{C}$ alors $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e_k$.

Donc $df = d(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e_k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k de_k$. Or, d'après le lemme précédent, de_k est de rang $|k|$.

df est donc de rang fini si et seulement si il existe un nombre fini de a_k non nuls si et seulement si f est un polynôme de Laurent. $\square$

Lemme 5.10 Soit un chemin continu sur $[0; 1]$, $t \mapsto u_t$ de fonctions inversibles. Alors il existe un chemin continu $t \mapsto v_t$ affine par morceaux de fonctions inversibles tel que $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$.

Preuve : L'application $t \mapsto \|u_t^{-1}\|_\infty$ est continue sur $[0; 1]$ qui est compact. Elle atteint donc son maximum $C = \max(\{\|u_t^{-1}\|_\infty / t \in [0; 1]\})$. Par uniforme continuité de $t \mapsto u_t$ sur $[0; 1]$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (t, t') \in [0; 1]^2, |t - t'| < \eta \implies \|u_t - u_{t'}\|_\infty < \frac{1}{C} (*)$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \frac{1}{\eta}$. Construisons un nouveau chemin $t \mapsto v_t$ tel que :

1. Pour tout $t \in \{0; \frac{1}{N}; \frac{2}{N}; \dots; \frac{N}{N} = 1\}$, $v_t = u_t$.
2. Si $t \in]\frac{k}{N}; \frac{k+1}{N}[$ avec $k \in \{0; 1; \dots; N-1\}$ alors :

$$v_t = (k + 1 - tN)u_{\frac{k}{N}} + (tN - k)u_{\frac{k+1}{N}}$$

Montrons que pour tout $t \in [0; 1]$, v_t est inversible.

Soit $t \in [0; 1]$ alors il existe un unique $k \in \{0; 1; \dots; N-1\}$ tel que $t \in [\frac{k}{N}; \frac{k+1}{N}]$. Avec :

$$\|v_t - u_{\frac{k}{N}}\|_\infty = |k - tN| \times \|u_{\frac{k}{N}} - u_{\frac{k+1}{N}}\|_\infty < \frac{1}{C}$$

Ainsi :

$$\forall u \in [0; 1], |v_t(u) - u_{\frac{k}{N}}(u)| < \frac{1}{C} \leq |u_{\frac{k}{N}}(u)|$$

Il vient :
 $\forall u \in [0; 1], 0 < |v_t(u)|$

Donc, pour tout $t \in [0; 1]$, v_t est inversible $\square$.

Lemme 5.11 Soit $f \in C^3(S^1)$ alors $f \in \mathcal{C}_0$ (ie : $df \in l^1(\mathcal{H})$).

Preuve : Soit $f \in C^3(S^1) \cap L^2(S^1)$ alors $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e_k$. Donc :

$$df = d\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k de_k.$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ alors $f^3 \in C(S^1)$ et $a_k = o\left(\frac{1}{|k^3|}\right)$.

De plus, de_k est de rang k avec $\|d(e_k)\|_{l^1(\mathcal{H})} = 2 \times |k|$ d'où :

$$\|a_k d(e_k)\|_{l^1(\mathcal{H})} = o\left(\frac{1}{|k^2|}\right)$$

On en déduit que $df \in l^1(\mathcal{H}) \square$.

Lemme 5.12 Soient des fonctions inversibles et homotopes $u_0, u_1 \in \mathcal{C}$ tels que $du_0, du_1 \in l^1(\mathcal{H})$ alors il existe une homotopie $t \mapsto v_t$ telle que :

1. $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1$
2. pour tout $t \in [0; 1]$, $v_t \in \mathcal{C}_0$
3. $t \mapsto v_t$ est continue et dérivable par morceaux avec :

$$\forall t \in [0; 1], \frac{d}{dt} dv_t \in l^1(\mathcal{H})$$

Preuve : Soit $s \in [0; 1]$, considérons la fonction ψ_s définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\psi_s(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{(\frac{s}{2})^2 - x^2}} & \text{si } |x| < \frac{s}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Posons $\phi_s = \psi_s(x - 1)$ et $\chi_s = \frac{\phi_s}{\|\phi_s\|_1}$. Alors χ_s est C^∞ à support compact et $\text{diam}(\text{Supp}(\chi)) < s$.

Pour tout $s \in [0; 1]$, posons $g_s = f * \chi_s$ avec $g_s(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \chi_s(u - t) dt$. La suite $(\varphi_k) = \chi_{\frac{1}{k}}$ est une approximation de l'unité.

Soit $f \in L^2(S^1)$. Alors la suite $(\varphi_k * f)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f et $\varphi_k * f \in C^\infty$.

Choisissons k suffisamment grand pour que, pour tout $t \in [0; 1]$, $v_t * \varphi_k$ reste inversible (cela est possible car $(\varphi_k * f)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f). Posons pour tout $t \in [0; 1]$, $w_t = u_t * \varphi_k$.

D'après le lemme 5.10, il existe un chemin continu $t \mapsto z_t$ affine par morceaux d'opérateurs inversibles tel que $z_0 = w_0$ et $z_1 = w_1$. Soit le chemin $t \mapsto v_t$ défini par :

1. $v_t = 3tz_0 + (1 - 3t)u_0$ si $t \in [0; \frac{1}{3}]$
2. $v_t = z_{3t-1}$ si $t \in [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$
3. $v_t = (3t - 2)u_1 + 3(1 - t)z_1$

Alors $t \mapsto z_t$ est affine par morceau tel que $z_0 = u_0$, $z_1 = u_1$.

Pour tout $t \in [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$, v_t est C^∞ donc, d'après le lemme 5.11, $dv_t \in l^1(\mathcal{H})$.

Si $t \in [0; \frac{1}{3}]$ alors $dv_t = 3tdz_0 + (1 - 3t)du_0$. Or $du_0 \in l^1(\mathcal{H})$ et $dv_{\frac{1}{3}} = z_0 \in l^1(\mathcal{H})$ donc, par construction, $dv_t \in l^1(\mathcal{H})$. De même, $dv_t \in l^1(\mathcal{H})$ si $t \in [\frac{2}{3}; 1]$.

Par construction $t \mapsto v_t$ est continue sur $[0; 1]$ et dérivable par morceaux $\square$.

Lemme 5.13 Si $f \in \mathcal{C}_0$ alors $df \in l^1(\mathcal{H})$ et $Tr(df) = 0$.

Preuve : On montre facilement que $df = 2[P, m_f]$. Or $f \in \mathcal{C}_0$ donc $df \in l^1(\mathcal{H})$ et $[P, m_f] = \frac{1}{2}df \in l^1(\mathcal{H})$.

On a : $(Pm_f - m_fP)P = Pm_fP - m_fP \in l^1(\mathcal{H})$

et $P(Pm_f - m_fP) = Pm_f - Pm_fP \in l^1(\mathcal{H})$ car $[P, m_f] \in l^1(\mathcal{H})$ et $l^1(\mathcal{H})$ est un idéal bilatère.

Par ailleurs :

$$Tr(P(Pm_f - m_fP)) = Tr(P(Pm_f - m_fP)) = Tr(PP(Pm_f - m_fP)) = Tr(P(Pm_f - m_fP)P) = Tr(Pm_fP - Pm_fP) = Tr(0) = 0$$

$$D'où : Tr(Pm_f - Pm_fP) = Tr(Pm_fP - m_fP) = 0.$$

$$Il vient : Tr(df) = 2tr(Pm_f - m_fP) = 2tr(Pm_f - Pm_fP + Pm_fP - m_fP) = 0 - 0 = 0 \square$$

Lemme 5.14 Soit un chemin continue et dérivable par morceaux $t \mapsto u_t$ d'opérateurs inversibles telle que $u_t \in \mathcal{C}_0$ pour tout $t \in [0; 1]$. Alors l'application $t \mapsto Tr(m_{u_t^{-1}}du_t)$ est dérivable par morceaux avec :

$$\frac{d}{dt}Tr(m_{u_t^{-1}}du_t) = 0.$$

Preuve : Remarquons tout d'abord que de $u_t^{-1} \times u_t = 1$, donc $t \mapsto u_t^{-1}$ dérivable par morceaux avec : $\frac{d}{dt}(u_t^{-1}) = -u_t^{-1} \frac{d}{dt}(u_t) u_t^{-1}$. Par linéarité et continuité de Tr , et par bilinéarité de l'opérateur de commutation il vient :

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}(Tr(m_{u_t^{-1}} du_t)) = Tr(\frac{d}{dt}(u_t^{-1})[F, m_{u_t}] + u_t^{-1} \frac{d}{dt}([F, m_{u_t}])) \\
& = -Tr(m_{u_t^{-1}} m_{\frac{d}{dt}u_t} u_t^{-1} [F, m_{u_t}]) + Tr(u_t^{-1} [F, m_{\frac{d}{dt}u_t}]) \\
& = -Tr(m_{u_t^{-1}} [F, m_{u_t}] m_{u_t^{-1}} m_{\frac{d}{dt}u_t}) + Tr(m_{u_t^{-1}} [F, m_{\frac{d}{dt}u_t}]) \\
& = Tr([F, m_{u_t^{-1}}] m_{\frac{d}{dt}u_t}) + Tr(m_{u_t^{-1}} [F, m_{\frac{d}{dt}u_t}]) \\
& = Tr([F, m_{u_t^{-1}} m_{\frac{d}{dt}u_t}]) \\
& = Tr([F, m_{u_t^{-1} \frac{d}{dt}u_t}]) \\
& = Tr(d(u_t^{-1} \frac{d}{dt}u_t)) = 0 \text{ d'après le lemme précédent. } \square
\end{aligned}$$

Définition 5.15 Soit $f \in \mathcal{C}_0$, on pose $w(f) = \frac{1}{2}Tr(m_{f^{-1}}df)$.

Lemme 5.16 Soient $f, g \in \mathcal{C}_0$, on a : $w(fg) = w(f) + w(g)$

Preuve : $2w(fg) = Tr(m_{(fg)^{-1}}d(fg)) = Tr(m_{g^{-1}}m_{f^{-1}}d(f)m_g) + Tr(m_{g^{-1}}m_{f^{-1}}m_fdg) =$
 $Tr(m_{f^{-1}}dfm_g)m_{g^{-1}}) + Tr(m_{g^{-1}}dg) = Tr(m_{f^{-1}}df) + Tr(m_{g^{-1}}dg) = 2w(f) +$
 $2w(g) \square.$

Lemme 5.17 $w(e_n) = n$.

Preuve : Par ailleurs : $w(z) = w(e_1) = \frac{1}{2}Tr(m_{e_{-1}}de_{-1})$. Or, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, d'après le lemme 5.8 :

$$m_{e_{-1}}de_1(e_n) = \begin{cases} 2m_{e_{-1}}e_{-1} & \text{si } n = -1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \text{ Il vient que, pour tout } h \in L^2(S^1) :$$

$$(m_{e_{-1}}de_{-1})(h) = 2 < h \mid e_{-1} > e_{-1}.$$

D'où : $Tr(m_{e_{-1}}de_1) = 2$ et $w(z) = 1$.

Or, d'après le lemme précédent : $w(e_n) = w(z^n) = nw(z)$ donc :

$$w(e_n) = n \square.$$

Théorème 5.18 Si $f \in \mathcal{C}_0$ est inversible alors :

$$Ind_{\tilde{f},0} = \frac{1}{2}Tr(m_{f^{-1}}df)$$

Remarque 5.19 On notera l'analogie avec la formule : $Ind_{\tilde{f},0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f'(e^{2\pi i t})}{f(e^{2\pi i t})} dt$

Preuve du Théorème : Remarquons tout d'abord que $df \in l^1(\mathcal{H})$ car $f \in \mathcal{C}_0$. Or $l^1(\mathcal{H})$ est un idéal bilatère donc $m_{f^{-1}}df \in l^1(\mathcal{H})$.
Notons n l'indice du lacet $u_0(t) = f(e^{2\pi i t})$ associé à f . D'après le Corollaire 2.19, nous savons que u_0 est homotope au lacet $u_1(t) = e^{2\pi i n t}$.
 $du_0, du_1 \in l^1(\mathcal{H})$ donc, d'après le lemme 5.12, il existe une homotopie $t \mapsto v_t$ telle que :

1. $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1$
2. pour tout $t \in [0; 1], v_t \in \mathcal{C}_0$
3. $t \mapsto v_t$ est continue et dérivable par morceaux avec pour tout $t \in [0; 1], \frac{d}{dt}v_t \in l^1(\mathcal{H})$

Posons $\phi(t) = \frac{1}{2}Tr(m_{v_t^{-1}}dv_t)$. Par linéarité de Tr , nous savons que ϕ est continue sur $[0; 1]$, dérivable par morceaux. D'après le lemme précédent, $\phi'(t) = 0$ sauf en un nombre fini de points. Par continuité, on en déduit que ϕ est constante sur $[0; 1]$.

D'où : $\phi(0) = \phi(1)$.

On a donc $\phi(0) = w(f) = \phi(1) = w(e_n) = n = Ind_{\tilde{f},0} \square$

Corollaire 5.20 Si $f \in \mathcal{C}_0$ est inversible alors :

$$Ind(T_f) = -Ind_{\tilde{f},0} = -\frac{1}{2}Tr(m_{f^{-1}}df)$$

Remarque 5.21 On a $l^1(\mathcal{H}) \subset l^2(\mathcal{H}) \subset l^3(\mathcal{H}) \dots$

L'égalité $Ind_{\tilde{f},0} = \frac{1}{2}Tr(m_{f^{-1}}df)$ n'est valable que pour $df \in l^1(\mathcal{H})$. Il serait intéressant d'obtenir de nouvelles formules sous des contraintes de régularité moins fortes. Par exemple, si $df \in l^3(\mathcal{H})$, alors :

$df^{-1} = -m_{f^{-1}}dfm_{f^{-1}} \in l^3(\mathcal{H})$ et $dfdf^{-1}df \in l^1(\mathcal{H})$.

On peut alors obtenir la proposition suivante :

Proposition 5.22 Soit $f \in C(S^1, \mathbb{C}^*)$ telle que $df \in l^3(\mathcal{H})$ alors :

$$Ind(T_f) = \frac{1}{8}Tr(m_{f^{-1}}dfdf^{-1}df)$$

6 Bibliographie.

- DIEUDONNE Jean, *Éléments d'analyse 1* (Editions Jacques Gabay - 2007)
- GODBILLON Claude, *Eléments de topologie algébrique* (Hermann - 1971)
- GOHBERG Israel, GOLDBERG Seymour, *Basic classes of linear operators* (Birkhauser - 2003).
- HIGSON Nigel, ROE John, *Analytic K-Homology* (Oxford University Press - 2000).
- SINGER I.M, THORPE John : *Lecture notes on elementary topology and geometry* (Springer - 1976)
- MURPHY G.J. , "Topological and analytical indices in C^* -algebras", *Journal of Functional Analysis* (2006)