Exercices Chap.42 et 43 : Probabilités sur un univers fini

1 Espaces probabilisés finis

Exercice 1.1. *Soit Ω un univers et soient A, B, C trois événements de Ω. Traduire en termes ensemblistes (en utilisant uniquement les symboles d'union, d'intersection et de passage au complémentaire, ainsi que A, B et C) les événements suivants :*

1. *Seul A se réalise ;*
2. *A et B se réalisent, mais pas C.*
3. *les trois événements se réalisent ;*
4. *au moins l'un des trois événements se réalise ;*
5. *au moins deux des trois événements se réalisent ;*
6. *aucun ne se réalise ;*
7. *au plus l'un des trois se réalise ;*
8. *exactement deux des trois se réalisent ;*

Exercice 1.2. *On tire trois cartes au hasard dans un paquet de 32 cartes. Quelle est la probabilité de*

1. *n'obtenir que des cœurs ?*
2. *que des as ?*
3. *deux cœurs et un pique ?*

On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.

Exercice 1.3. *On dispose d'un dé pipé tel que la probabilité d'obtenir une face soit proportionnelle au chiffre porté par cette face. On lance le dé pipé.*

1. *Donner un espace probabilisé modélisant l'expérience aléatoire.*
2. *Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair.*
3. *Reprendre les questions si cette fois le dé est pipé de sorte que la probabilité d'une face paire soit le double de la probabilité d'une face impaire.*

2 Probabilités conditionnelles

Exercice 2.1. *Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires, indiscernables au toucher. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.*

1. *Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure dans le tirage ?*
2. *Sachant qu'au moins une boule noire figure dans le tirage, quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire ?*

Exercice 2.2. *Probabilités composées.*
On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires (toutes indiscernables au toucher). On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne.
Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire ?

Exercice 2.3. *Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R_1, R_2 et R_3 : les bons risques, les risques moyens, et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent* 20% *de la population totale pour la classe R_1,* 50% *pour la classe R_2, et* 30% *pour la classe R_3.*
Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.

1. *Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?*
2. *Si M.Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?*

Exercice 2.4. *Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, une personne transmet la même information que celle qu'elle a reçue. Avec une probabilité $1-p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.*

1. *Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.*
2. *On définit la suite (u_n) de terme général $u_n = p_n - \frac{1}{2}$.*
   Montrer que (u_n) est géométrique.
3. *En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.*
4. *En déduire la valeur de $\lim p_n$. Qu'en pensez-vous ?*

Exercice 2.5. *Jules décide de ne plus fumer. Aujourd'hui,il y est parvenu. Mais pour la suite, on admet que :*

- *s'il ne fume pas un jour donné, alors la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est 0,7.*

- *s'il fume un jour donné, alors la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est 0,4.*

On se demande comment le comportement de Jules va évoluer et quelles sont ses chances de réussite.
On désigne, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement

$$S_n : \text{"Jules ne fume pas le } n\text{-ième jour"}$$

et on note p_n la probabilité de S_n.

1. *Illustrer par un arbre pondéré les chances de réalisation de S_n sur les jours consécutifs n et $n+1$.*
2. (a) *Donner la valeur de p_1.*
   (b) *Etablir que pour $n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = \frac{3}{10}p_n + \frac{2}{5}$*
3. (a) *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $q_n = p_n - \frac{4}{7}$.*
   Montrer que la suite (q_n) est géométrique.
   (b) *En déduire q_n puis p_n en fonction de n.*
4. *Étudier si les affirmations suivantes sont vraies :*
   (a) *p_n croît lorsque n croît.*
   (b) *p_n reste supérieur ou égal à 0,5.*
   (c) *Pour n suffisamment grand, p_n est très voisine de $\frac{4}{7}$.*

3 Indépendance

Exercice 3.1. 1. *Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une hasard, et on considère les événements :*

$A =$ "tirage d'un nombre pair", $B =$ "tirage d'un multiple de 3".

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2. *Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules.*

Exercice 3.2. *Votre voisine a deux enfants dont vous ignorez le sexe. On considère les trois événement suivants :*

- *A :"les deux enfants sont de sexes différents"*
- *B : "l'ainé est une fille"*
- *C : "le cadet est un garçon".*

Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 3.3. *Probabilité d'une réunion et indépendance.*
Soient $A_1, \ldots, A_n$, n événements d'un espace probabilisé (Ω, P). On les suppose mutuellement indépendants et de probabilités respectives $p_i = P(A_i)$.

1. *Donner une expression simple de* $P(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ *en fonction de* $p_1, \ldots, p_n$.
2. *On suppose qu'une personne est soumise à* n *expériences indépendantes les unes des autres et qu'à chaque expérience, elle ait une probabilité* p *d'avoir un accident. Quelle est la probabilité qu'elle ait au moins un accident ?*