

Pour le 1er octobre 2021

Devoir-Maison 4 - CORRECTION

Exercice 0.1. On considère la fonction $f : t \mapsto \frac{\arctan(t)}{t^2}$.

1. Déterminer les plus grands intervalles sur lesquels f est continue.
La fonction $\arctan$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc f est continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$.
2. Montrer que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)}dt$.

Indication : on pourra faire une intégration par parties sur le segment $[1; x]$ avec $x > 1$.

La fonction f est continue sur $[1; +\infty[$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ n'est impropre qu'en $+\infty$.

Les différentes fonctions étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; x]$, on effectue une intégration par parties sur le segment $[1; x]$, (où $x > 1$ est fixé) :

$$\begin{aligned} \int_1^x f(t)dt &= \left[-\frac{\arctan(t)}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)}dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan(x)}{x} + \int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)}dt \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(x)}{x} = 0$ ($\arctan$ étant bornée par $\frac{\pi}{2}$), on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t)dt$ existe dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)}dt$ existe dans $\mathbb{R}$.

Les intégrales impropres $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)}dt$ sont donc de même nature.

3. Déterminer trois réels a, b, c tels que

$$\forall t \geq 1, \quad \frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2}$$

Pour tous réels a, b, c , on a :

$$\forall t \geq 1, \quad \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2} = \frac{(a+b)t^2+ct+a}{t(1+t^2)}$$

donc cette fraction est égale à $\frac{1}{t(1+t^2)}$ pour tout t si et seulement si

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ a=1 \end{cases}, \text{ c'est-à-dire } (a, b, c) = (1, -1, 0).$$

On a donc : $\forall t \geq 1, \quad \frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}$.

4. En déduire que $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge et calculer sa valeur.
 La décomposition précédemment obtenue permet de calculer $\int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)} dt$:

$$\int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)} dt = \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2} \right) dt = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{\ln(2)}{2}$$

Enfin, on passe à la limite lorsque $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) &= \ln(x) - \frac{1}{2} \left(\ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

donc :

$$\int_1^x \frac{\arctan(t)}{t^2} dt = \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan(x)}{x} + \int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$$

ce qui montre que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$.

5. Pouvait-on prévoir dès le début que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge ?
Indication : on pourra utiliser un équivalent de f en $+\infty$.
 Oui, on pouvait prévoir la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$, car f est continue sur $[1; +\infty[$ et $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{\pi}{2}}{t^2} > 0$, et $\int_1^{+\infty} \frac{\pi/2}{t^2} dt$ converge (exemple de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).
6. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$.
 On a $f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t} > 0$, et $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ diverge, donc d'après le critère des équivalents, $\int_0^1 f(t)dt$ diverge.
7. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$.
 Puisque l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ diverge, on en déduit que l'intégrale doublement impropre $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge.