Chap.44 : Variables aléatoires réelles sur un univers fini

Dans ce chapitre, Ω désigne un univers fini et p une probabilité sur Ω.

1 Variables aléatoires

Historiquement, la notion de variable aléatoire a été introduite pour l'étude des gains dans des jeux d'argent. Doit-on jouer ? Combien d'argent peut-on espérer gagner ?
De façon générale, une variable aléatoire est une quantité numérique associée au résultat d'une expérience aléatoire.

1.1 Généralités

Définition 1.1. *Une* ***variable aléatoire*** *sur l'univers Ω est une application :*

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$

X est donc une fonction qui à chaque résultat w de l'expérience aléatoire, associe une valeur $X(w)$.

Exemple 1.2. *On jette deux dés à 6 faces : un bleu et un rouge. L'univers des résultats possibles est : $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$.*
Pour tout couple $\omega = (i, j)$ de Ω, on peut définir $X(\omega) = i+j$, et représenter tous les cas possibles dans le tableau suivant :

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

On a ici

$$X(\Omega) = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}.$$

Il faut comprendre la variable aléatoire X de la manière suivante : ω est le résultat brut de l'expérience (le couple de chiffres donné par le lancer de dés), mais $X(\omega) \in X(\Omega)$ est l'observation d'un résultat particulier qui nous intéresse (ici la somme).

1.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 1.3. *Soient une variable aléatoire X sur Ω et $A \subset \mathbb{R}$. On définit l'événement* $[\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}]$ *par :*

$$[X \in A] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\}$$

Remarque 1.4.
- *Si $A = \{x\}$ alors :*

$$[X \in A] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in \{x\}\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}$$

- *Si $A = [a;b]$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ alors :*

$$[X \in A] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in [a;b]\} = \{\omega \in \Omega, a \leq X(\omega) \leq b\}$$

Définition 1.5. *Soit une variable aléatoire X sur Ω. On appelle* ***loi de probabilité*** *de la variable aléatoire X, l'application*

$$p_X : \mathscr{P}(X(\Omega)) \to [0,1]$$

définie pour tout $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$ par :

$$p_X(A) = p([X \in A])$$

Remarque 1.6. *$X(\Omega)$ étant fini, la loi de probabilité p_X est complètement déterminée par la connaissance des $p_X(\{x_i\}) = p(X = x_i)$. En effet :*

$$p_X(A) = \sum_{x_i \in A} p(X = x_i)$$

Exemple 1.7. *On peut définir la loi de probabilité de l'exemple 1.2. Par exemple : $[X = 3] = \{(i,j) \in [\![1,6]\!]^2, i + j = 3\} = \{(1,2),(2,1)\}$ donc :*

$$p_X(3) = p(X = 3) = \frac{card([X=3])}{card(\Omega)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Plus généralement, on peut représenter les résultats dans le tableau suivant :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Méthode 1.8. *Pour donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire X, il faut :*

1. *décrire l'ensemble des valeurs prises par X : $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$;*
2. *donner $p(X = x_i)$ pour toutes les valeurs prises par X ;*
3. *lorsque X prend un nombre de valeurs assez faible, on peut résumer ces informations dans un tableau :*

x_i	x_1	...	x_n	*Total*
$p(X = x_i)$	$p(X = x_1)$	...	$p(X = x_n)$	*1*

Application 1.9. *On jette un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On définit une variable aléatoire X en associant à chaque tirage le nombre :*

- -10 *si on tire le numéro* 6
- 20 *si on tire le numéro* 1
- 0 *sinon*

1. *Définir l'ensemble Ω des éventualités et donner l'ensemble $X(\Omega)$*
2. *On suppose que le dé est truqué et que les probabilités d'apparition des numéros 1, 2, 3, 4 et 5 sont toutes égales à 0,12. Donner la loi de probabilité de X.*

Application 1.10. *Une urne contient 10 boules : 7 rouges et 3 noires, qui sont indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remises trois boules de l'urne. Soit X le nombre de boules noires.*
Déterminer la loi de probabilité de X.

Proposition 1.11. ***Image d'une variable aléatoire par une fonction.***
Soit X une variable aléatoire sur (Ω, p) et une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Alors $\varphi(X)$ est une nouvelle variable aléatoire dont la loi de probabilité se déduite de celle de X :

$$\forall x \in \mathbb{R}, p_{\varphi(X)}(x) = p(\varphi(X) = x) = p(X \in \varphi^{-1}(\{x\}) = p_X(\varphi^{-1}(\{x\})$$

Application 1.12. *On lance deux fois une pièce de monnaie. La variable aléatoire X désigne le nombre de "Piles" obtenus.*

On joue selon la règle suivante : la participation coûte 10 *euros et chaque "Pile" obtenu rapporte 8 euros.*
La variable aléatoire G désigne le gain. Déterminer la loi de probabilité de G.

Application 1.13. *Soit $a \in \,]0;1[$ et une variable aléatoire X dont la loi est donnée par :*

x_i	-1	0	1
$p(X = x_i)$	$\frac{a}{2}$	$1-a$	$\frac{a}{2}$

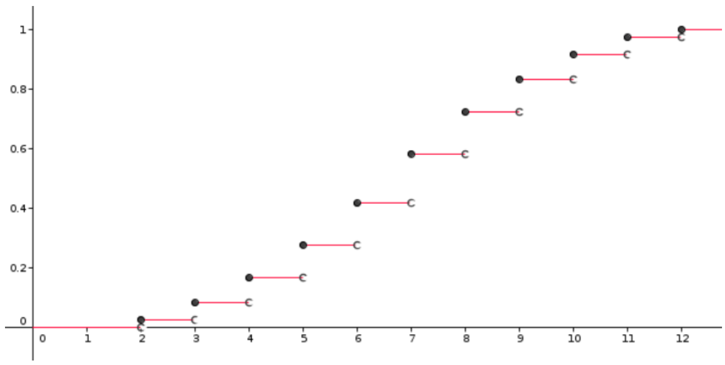
Déterminer la loi des variables aléatoires $Y = 3X - 1$ et $Z = X^2$.

1.3 Fonction de répartition

Définition 1.14. *Soit X une variable aléatoire sur (Ω, p). On appelle* ***fonction de répartition*** *de la variable aléatoire X, l'application :*

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to [0;1] \\ x \mapsto p(X \leq x) \end{array} \right.$$

Exemple 1.15. *Reprenons l'exemple 1.2 (somme des lancers de deux dés). La courbe de la fonction de répartition est :*



Application 1.16. *On considère une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = [\![0;4]\!]$ avec :*

$$p([X=0]) = \frac{1}{9}, p([X=1]) = \frac{1}{5} \text{ et } p([X=2]) = \frac{1}{3}.$$

1. *Sachant que les événements $[X=3]$ et $[X=4]$ sont équiprobables, déterminer la loi de probabilité de X.*
2. *Déterminer une expression de la fonction de répartition F_X de X puis construire sa courbe représentative.*

Proposition 1.17. *Soit X une variable aléatoire sur (Ω, p) et F_X sa fonction de répartition. Alors :*

- *F_X est une fonction en escalier, continue à droite.*
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
- *F_X est croissante*

Méthode 1.18. *Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire dont on connait la fonction de répartition F_X, on procède en deux étapes :*

1. *Les valeurs prises par X sont les points de discontinuité de la fonction F_X. On les note $x_1 < ... < x_n$.*
2. *On remarque que $p(X = x_1) = F_X(x_1)$ puis que :*

$$\forall i \in [\![2, n]\!], p(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$$

Application 1.19. *Soit la variable aléatoire X dont la fonction de répartition est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < -2 \\ 0,2 & si\ -2 \leq x < 0 \\ 0,7 & si\ 0 \leq x < 4 \\ 1 & si\ 0 \leq x \geq 4 \end{cases}$$

Déterminer la loi de probabilité de X

2 Espérance d'une variable aléatoire

Dans la suite, X désigne une variable aléatoire sur (Ω, p) telle que :

$$X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}.$$

Définition 2.1. *Le nombre réel noté $E(X)$ défini par :*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i p(X = x_i) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\{\omega\}) X(\omega)$$

*est appelé l'**espérance** de X.*

Remarque 2.2.
- *L'espérance peut s'interpréter comme la moyenne des valeurs prises par X pondérées par leurs probabilités respectives.*
- *Intuitivement, l'espérance de la variable aléatoire X est la moyenne des valeurs que prendra X si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire. Si X désigne le gain à un jeu, $E(X)$ est donc ce que l'on peut espérer gagner "en moyenne".*

Définition 2.3. *On dit que la variable aléatoire X est **centrée** lorsque $E(X) = 0$.*
Lorsque la variable aléatoire G désigne la gain d'un joueur à un jeu d'argent, on dit que le jeu est équilibré lorsque G est centrée.

Application 2.4. *On considère la variable aléatoire Z dont la loi de probabilité est :*

z_i	-3	1	4
$p(Z = z_i)$	$\frac{a}{5}$	$1 - \frac{2a}{5}$	$\frac{a}{5}$

Calculer son espérance.

Application 2.5. *On considère X le nombre de "Pile" obtenu en deux lancés d'une pièce équilibrée. Calculer l'espérance de X.*

Théorème 2.6. ***Théorème de transfert.***
Soit une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. L'espérance de la variable aléatoire $\varphi(X)$ vaut :

$$E(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_X(x_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x) p(X = x)$$

Application 2.7. *Un joueur lance un dé équilibré. Si X désigne le chiffre obtenu, on désigne par G le gain obtenu tel que $G = 2X - 8$.*
Calculer $E(G)$ et $E(X^2)$.

Proposition 2.8. ***Linéarité de l'espérance.***
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

- *$E(aX + b) = aE(X) + b$*
- *Soit Y une autre variable aléatoire sur (Ω, p) alors :*

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Remarque 2.9. *En prenant $a = 1$ et $b = -E(X)$ dans la première égalité, la variable aléatoire $X - E(X)$ est centrée.*

Application 2.10. *Le nombre de repas servis par un restaurant scolaire un jour donné est une variable aléatoire X d'espérance mathématique égale à 500. Le coût d'un repas est 2 euros et les coûts fixes journaliers sont de 1 000 euros.*
Soit Y la variable aléatoire égale au gain algébrique journalier pour le restaurant. Calculer $E(Y)$.

3 Variance et écart-type

Définition 3.1. *Soit X une variable aléatoire sur (Ω, p).*
*On appelle **variance** de X le réel positif défini par :*

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

*L'**écart-type** de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.*
*On dit que la variable aléatoire X est **réduite** lorsque $V(X) = 1$.*

Remarque 3.2. *On observe que $V(X)$ est la moyenne (pondérée) des carrés des écarts entre les valeurs possibles de X et la moyenne (pondérée) de ses valeurs. La variance est donc un **indicateur de dispersion**.*

Application 3.3. *On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par :*

x_i	-5	1	9
$p(X = x_i)$	$0,4$	$0,5$	$0,1$

Calculer la variance de X.

Proposition 3.4. *Kœnig-Huygens.*
Soit X une variable aléatoire sur (Ω, p). Alors :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Preuve :

Application 3.5. *Reprendre le calcul de la variance de l'application 3.3 en utilisant la propriété de Kœnig-Huygens.*

Remarque 3.6. *La propriété de Kœnig-Huygens permet de calculer la variance d'une variable aléatoire plus rapidement qu'avec la définition.*

Application 3.7. *Soit* $\theta \in \left[0; \frac{1}{2}\right[$ *et une variable aléatoire* X *à valeurs dans* $[\![0;3]\!]$ *dont la loi de probabilité est donnée par :*

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	θ	$\frac{1}{2} - \theta$	$\frac{1}{2} - \theta$	θ

Calculer $E(X)$ *et* $V(X)$*.*

Proposition 3.8. *Effet d'une dilatation et d'une translation sur la variance. Soient* X *une variable aléatoire sur* (Ω, p) *et* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$*. Alors :*

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Proposition 3.9. *Soit* X *une variable aléatoire sur* (Ω, p)*. Si* $V(X) \neq 0$ *alors :*

- $\frac{X}{\sqrt{V(X)}}$ *est une variable aléatoire réduite ;*

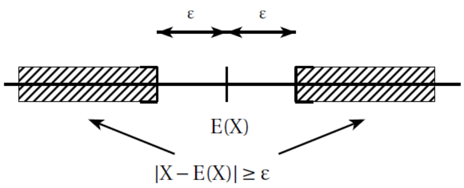
- $\frac{X-E(X)}{\sqrt{V(X)}}$ *est une variable aléatoire centrée réduite.*

Preuve :

Théorème 3.10. ***Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.*** *Soient X une variable aléatoire sur (Ω, p) et $\varepsilon > 0$. Alors :*

$$p(\mid X - E(X) \mid) \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Remarque 3.11. *$p(\mid X - E(X) \mid) \geq \varepsilon)$ est la probabilité pour que X prenne des valeurs éloignées de $E(X)$ d'au moins ε.*
Cette probabilité est d'autant plus faible que $V(X)$ est plus petite et que ε est plus grand.



Ce résultat peut être aussi très pratique pour majorer ou minorer certaines probabilités dont le calcul peut s'avérer coûteux

Application 3.12. *Soit X une variable aléatoire telle que $E(X) = 200$ et $V(X) = 5$. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une majoration de $p(X \geq 210)$.*

4 Lois usuelles

4.1 Loi certaine

La loi certaine est la loi d'une variable aléatoire pour laquelle une seule valeur peut se produire, par exemple le lancé d'un dé truqué pour lequel le résultat X est toujours 6.
La loi de probabilité de X est alors résumée par :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	0	0	0	0	0	0	1

Définition 4.1. *Soient X une variable aléatoire sur $\Omega, p)$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $p(X = x) = 1$. Alors :*

- $E(X) = x$
- $V(X) = 0$

*On dit que X suit une **loi certaine**.*

Remarque 4.2. *Une variable aléatoire ayant une variance nulle suit une loi certaine.*

4.2 Loi uniforme

La loi uniforme est celle d'une variable aléatoire dont les valeurs sont équiprobables ; par exemple le lancé d'un dé équilibré dont le résultat est X.

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Définition 4.3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi uniforme**, notée $\mathscr{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$ lorsque $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ avec les probabilités $p(X = x_i) = \frac{1}{n}$.*
Lorsqu'une variable aléatoire X suit la loi $\mathscr{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$, on note $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$.

Proposition 4.4. *Si $X(\Omega) = \{1, 2, ..., n\}$ et si X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$ alors :*

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

dans le cas où X sut une loi uniforme et que ses valeurs sont harmonieusement réparties dans un intervalle $[a, b]$ alors $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

Application 4.5. *Un jeu propose les gains algébriques suivants, en euros, qui sont tous équiprobables : -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10 et 15. On note X la variable aléatoire associée à ce gain.*

1. *Exprimer X à l'aide d'une variable aléatoire Y suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ sous forme d'une relation affine.*
2. *En déduire $E(X)$ et $V(X)$.*

4.3 Loi de Bernouilli

Une exprérience aléatoire est dite binaire (ou de Bernouilli) lorsqu'elle n'a que deux issues possibles. De même, une variable aléatoire de Bernouilli est une variable aléatoire qui ne prend que deux valeurs.

Définition 4.6.

- *La loi d'une variable aléatoire qui ne prend que deux valeurs : 0 et 1 s'appelle la* ***loi de Bernouilli****.*
- *En posant $p(X=1)=p\in[0;1]$, la loi de probabilité de X est :*

x_i	0	1
$p(X=x_i)$	$1-p$	p

- *Les événements $[X=0]$ et $[X=1]$ sont appelés* ***échec et succès****.*
- *On note $\mathscr{B}(p)$ la loi de Bernouilli de paramètre p. Lorsqu'une variable aléatoire X suit la loi $\mathscr{B}(p)$, on note $X\hookrightarrow\mathscr{B}(p)$.*

Exemple 4.7.

1. *On lance une pièce de monnaie, en notant $X=1$ si le résultat est pile et $X=0$ si le résultat est face. Alors $X\hookrightarrow\mathscr{B}(\frac{1}{2})$ (on a aussi $X\hookrightarrow\mathscr{U}(\llbracket 0;1\rrbracket)$).*
2. *On effectue un tirage avec remise dans une urne contenant 2 boules blanches et 3 boules noires, en notant $X=1$ en cas d'apparition de la boule blanche, et $X=0$ sinon. Alors $X\hookrightarrow\mathscr{B}(\frac{2}{5})$.*

Proposition 4.8. *Si $X\hookrightarrow\mathscr{B}(p)$ alors :*

$$E(X)=p \text{ et } V(X)=p(1-p)$$

Preuve :

Application 4.9. *On lance un dé. Bertrand gagne 1 euro lorsqu'il fait un résultat supérieur ou égal à 4 et rien sinon. On note G son gain. Déterminer la loi de G, ainsi que $E(G)$ et $V(G)$.*

Application 4.10. *On s'intéresse au taux d'échec d'un élève lors du remplissage d'un Q.C.M.*
On suppose que la variable aléatoire qui vaut 1 lorsqu'il répond juste et 0 sinon suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.
Expérimentalement on a estimé que $V(X) \approx \frac{1}{5}$.
Avec quelle probabilité l'élève réussit-il la dernière question ?

4.4 Loi binomiale

Application 4.11. *Soit une pièce de monnaie qui tombe sur "Pile" avec une probabilité* $p \in [0; 1]$. *On la lance trois fois de suite et on considère* X *: le nombre de "Pile" obtenus.*

1. *Représenter l'expérience par un arbre de probabilité.*
2. *Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire* X.
3. *Déterminer* $E(X)$.

Dans cette expérience, chaque lancer est une expérience de Bernouilli si l'on appelle succès le fait d'obtenir "Pile" et "Échec" le fait d'obtenir "Face".
X est alors le nombre de succès lors de la répétition de 3 épreuves de Bernouilli identiques et indépendantes (le résultat d'un des lancers n'influe pas sur les suivants).
On dit alors que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et p.

Définition 4.12. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $p \in [0; 1]$.

- *La* ***loi binomiale*** *de paramètres* n *et* p *est la loi d'une variable aléatoire qui compte le nombre de succès lorsque l'on répète de façon identique et indépendante* n *fois une épreuve de Bernouilli de paramètre* p.

- *On note $\mathscr{B}(n,p)$ la loi binomiale de paramètres n et p. Lorsqu'une variable aléatoire X suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$, on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.*

Proposition 4.13. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0;1]$ et $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$. Alors :*

- $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$
- $\forall k \in [\![0;n]\!], p(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Preuve :

Proposition 4.14. *Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ alors :*

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p)$$

Application 4.15. *Un QCM comporte 8 questions. A chaque question, trois solutions sont proposées ; une seule est exacte. Chaque bonne réponse rapporte 0,5 point. On répond au hasard à chaque question.*

1. *On note X le nombre de bonnes réponses. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.*
2. *Quelle est la probabilité de commettre au moins une erreur ?*
3. *Quelle est la probabilité de répondre correctement à exactement 8 questions ?*
4. *Combien de bonnes réponses peut-on espérer obtenir ?*
5. *Quelle note peut-on alors espérer obtenir ?*