Chap.34 : Intégration d'une fonction continue sur un segment

Dans tout ce qui suivra :

- I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point ;
- f désignera une fonction $f : I \to \mathbb{R}$;
- $\mathscr{C}_f$ désignera la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$;
- $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

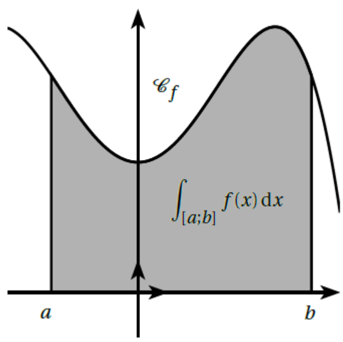
Dans toute la suite, a et b désigneront deux réels tels que $a < b$.

1.1 Généralités

Définition 1.1.

- *On appelle* ***unité d'aire*** *l'aire d'un carré construit sur $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.*
- *Soient un segment $[a; b] \subset I$ et f une fonction continue sur et positive sur $[a; b]$. On appelle* ***intégrale*** *de f sur le segment $[a; b]$, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine situé entre :*
  - *$\mathscr{C}_f$;*
  - *les droites d'équations $x = a$ et $x = b$;*
  - *l'axe des abscisses.*

  Cette aire est exprimée en unités d'aires. Elle est notée $\boldsymbol{\int_{[a;b]} f(x)\,\mathrm{d}x}$ ou $\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$ ou encore $\boldsymbol{\int_a^b f}$.



Définition 1.2. *Soient un segment $[a;b] \subset I$ et $f \in \mathscr{C}([a;b], \mathbb{R})$.*

- *Si f est négative sur $[a;b]$ alors $\int_{[a;b]} f(x)\,\mathrm{d}x$ désigne l'opposé de l'aire du domaine décrit précédemment :*

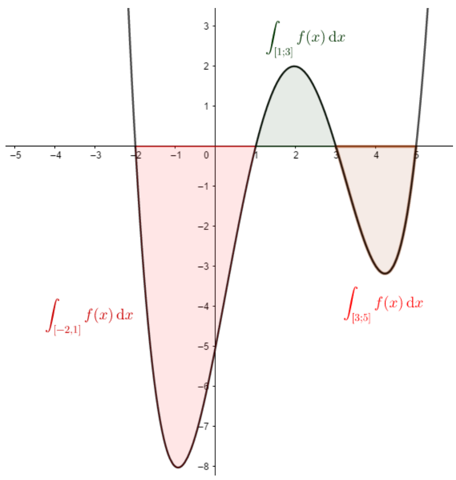
$$\int_{[a;b]} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{[a;b]} \mid f(x) \mid \,\mathrm{d}x$$

- *Si f n'est pas de signe constant sur $[a;b]$ alors $\int_{[a;b]} f(x)\,\mathrm{d}x$ désigne la somme des aires comptées :*
  - *positivement sur tout segment inclus dans $[a;b]$ où $f \geq 0$;*
  - *négativement sur tout segment inclus dans $[a;b]$ où $f < 0$.*

  positivement

Exemple 1.3. *Sur la courbe de f représentée ci-dessous :*

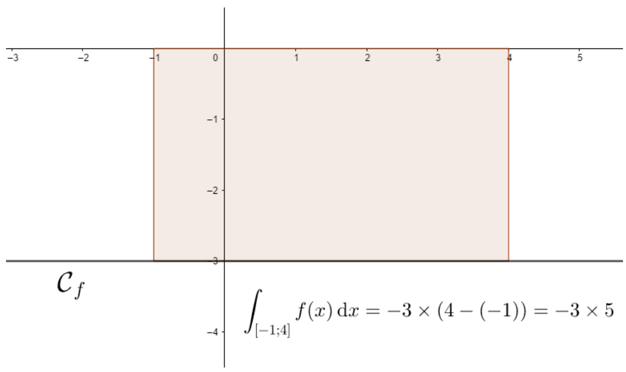
$$\int_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-2}^{1} \mid f(x) \mid \,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{3}^{5} \mid f(x) \mid \,\mathrm{d}x$$



Remarque 1.4. *Il suffit parfois d'appliquer la définition pour calculer une intégrale :*

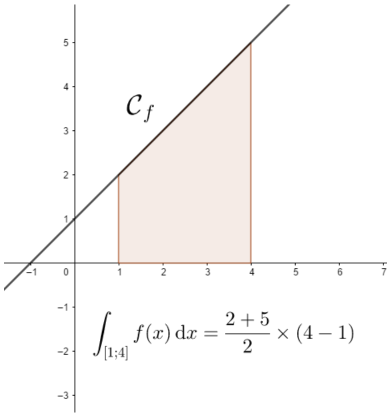
- *si $f(x) = k$ sur $[a;b]$ alors $\int_{[a;b]} f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire algébrique d'un rectangle de dimensions k et $b-a$:*

$$\int_{[a;b]} f(x)\,\mathrm{d}x = k(b-a)$$



- *si f est une fonction affine du type $f(x) = mx + p$ positive sur $[a;b]$ alors $\int_{[a;b]} f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire algébrique d'un trapèze de hauteur $b-a$, de bases $f(a)$ et $f(b)$:*

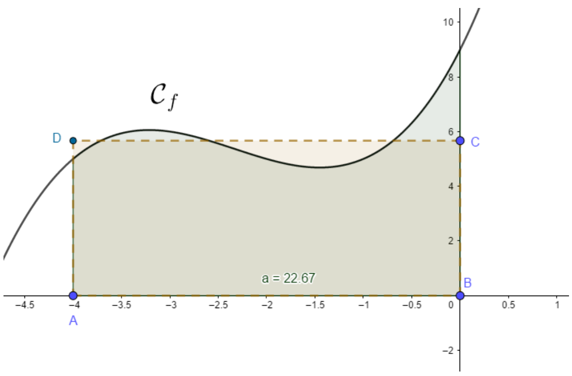
$$\int_{[a;b]} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(a)+f(b)}{2} \times (b-a)$$



Définition 1.5. *Soient un segment $[a;b] \subset I$ et $f \in \mathscr{C}([a;b], \mathbb{R})$. On appelle* ***valeur moyenne*** *de f sur $[a;b]$ le réel :*

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_{[a;b]} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque 1.6. *La valeur moyenne d'une fonction sur un segment s'interprète géométriquement : il s'agit de la hauteur du rectangle $ABCD$ dont l'aire algébrique est égale à $\int_{[a;b]} f(x)\,\mathrm{d}x$.*



1.2 Propriétés de l'intégrale sur un segment

Proposition 1.7. ***Linéarité.***
$\forall (f,g) \in \mathscr{C}([a;b], \mathbb{R})^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

- $\int_{[a;b]} (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a;b]} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{[a;b]} g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int_{[a;b]} (\lambda f)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_{[a;b]} f(x)\,\mathrm{d}x$

Proposition 1.8. *Positivité et croissance sur un segment.*
Soit $(f, g) \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})^2$ *:*

- *si* f *est positive sur* $[a; b]$ *alors* $\int_{[a;b]} f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$ *;*
- *si* $f \leq g$ *alors* $\int_{[a;b]} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{[a;b]} g(x)\,\mathrm{d}x$*.*

Proposition 1.9. *Soient un segment* $[a; b] \subset I$ *et* $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ *:*

$$\mid \int_{[a;b]} f(x)\,\mathrm{d}x \mid \leq \int_{[a;b]} \mid f(x) \mid \,\mathrm{d}x$$

Proposition 1.10. ***Relation de Chasles.***
Soient un segment $[a; b] \subset I$ *et* $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ *:*

$$\forall c \in [a; b]\,, \int_{[a;b]} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a;c]} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{[c;b]} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Théorème 1.11. ***Théorème de nullité.***
Soient un segment $[a; b] \subset I$ *et* $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ ***positive*** *:*

$$\int_{[a;b]} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow f \text{ est nulle sur } [a; b]$$

Remarque 1.12. *Soit* f *définie par* $f(x) = 1 - x$*.*
$\int_{[0;2]} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ *mais* f *n'est pas nulle sur* $[0; 2]$*.*
L'hypothèse "f *est positive sur le segment" est donc nécessaire.*

Preuve :

1.3 Extension de la notation

La notation $\int_{[a;b]} f(x)\,\mathrm{d}x$ n'a de sens que :

- si $a < b$ puisqu'il le faut pour que l'intervalle $[a; b]$ ait du sens.
- si f est à valeurs réelles.

On va donc proposer maintenant de « prolonger » ce concept « d'intégrale de a à b ».

Définition 1.13. *Soient* $(a, b) \in I^2$ *et* $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ *:*

- *si* $a < b$ *alors* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *est l'intégrale de* f *sur le segment* $[a; b]$ *comme définie précédemment ;*
- *si* $a = b$ *alors* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ *;*

- *si $a > b$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{[b;a]} f(x)\,\mathrm{d}x$*

Remarque 1.14.
- *La linéarité et la relation de Chasles s'appliquent toujours dans le cas où $a \geq b$.*
- *Par contre, les propriétés liées à l'ordre (positivité, croissance, majoration de la valeur absolue d'une intégrale) ne s'appliquent que dans le cas où $a < b$.*

Définition 1.15. *Soient un segment $[a;b] \subset I$ et $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{C})$. Alors :*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b Re(f)(x)\,\mathrm{d}x + i\int_a^b Im(f)(x)\,\mathrm{d}x$$

2 Quelques résultats d'intégration numérique

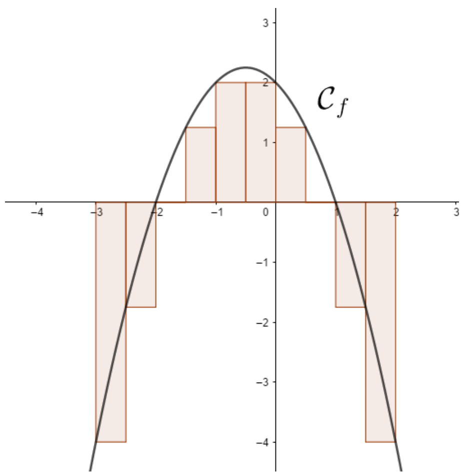
2.1 Somme de Riemann et méthode des rectangles

Définition 2.1. *Soient un segment $[a;b] \subset I$ et $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$. On appelle sommes de Riemann de f sur $[a;b]$ les nombres définis par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})$$

Exemple 2.2. *Si $f(x) = (-x+1)(x+2)$ et si $n = 10$ sur $[-3;2]$:*

$$R_n = \frac{5}{10}\sum_{k=0}^{9} f(-3 + k\frac{5}{n})$$



Remarque 2.3. *L'interprétation géométrique a déjà été étudiée en informatique : R_n est une somme d'aires algébriques de rectangles. Nous avons écrit un algorithme permettant de calculer R_n par la méthode des rectangles à gauche.*

```
def f(x):
    return((-x+1)*(x+2))

def riemann(f,a,b,n):
    s=0
    h=(b-a)/n
    x=a
    for i in range(n):
        s=s+f(x)
        x=x+h
    return(h*s)

print(riemann(f,-3,2,10))
```

Théorème 2.4. *Soient un segment* $[a;b] \subset I$ *et* $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ *alors :*

$$\lim R_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Preuve :

Dans le cas d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Démontrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :
$$\forall (x,y) \in [a;b]^2, \mid f(y) - f(x) \mid \leq M \mid y - x \mid.$$
2. En déduire que $\mid R_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \mid \leq \frac{M(b-a)^2}{n}$.
3. En déduire que $\lim R_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Application 2.5. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose :*

1. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

2. $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$

Démontrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ *et* $(v_n)_{n\geq 1}$ *convergent et déterminer leur limite.*

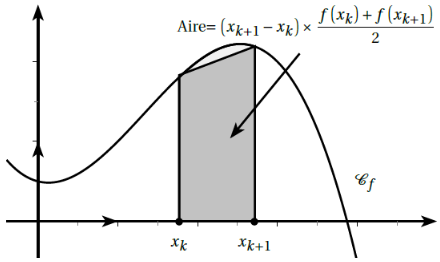
2.2 Méthode des trapèzes

Théorème 2.6. *Soient un segment* $[a;b] \subset I$ *et* $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$.
On approche $I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ *par l'aire d'un trapèze rectangle dont la hauteur est* $x_{k+1} - x_k$ *et les bases ont pour longueur* $f(x_k)$ *et* $f(x_{k+1})$. *On pose :*

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} \times \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k))$$

Alors

$$\lim T_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



3 Calcul intégral

3.1 Intégrale et primitives

Théorème 3.1. ***Théorème fondamental du calcul intégral.*** *Soit* $x_0 \in I$ *et* $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$. *Soit la fonction* F *définie sur* I *par* $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$. *Alors* F *est* ***l'unique*** *primitive de* f *s'annulant en* x_0.

Théorème 3.2. *Soient* $(a,b) \in I^2$,$f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ *et* F ***une*** *primitive de* f *sur* I. *Alors :*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \text{ aussi noté } [F(x)]_a^b$$

Application 3.3. *Calculer les intégrales suivantes :*

1. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} cos(t) sin^4(t)\,\mathrm{d}t$
3. $\int_0^1 te^{t^2}\,\mathrm{d}t$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan(\theta)\,\mathrm{d}\theta$
5. $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$
6. $\int_{-1}^1 \mid t^2 - t \mid\,\mathrm{d}t$

Application 3.4. *Cas des fonctions rationnelles.*

1. *Calculer* $A = \int_{-1}^{1} \frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
2. (a) *Démontrer qu'il existe* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{t-1}{t^2-5t+6} = \frac{\alpha}{t-2} + \frac{\beta}{t-3}$

   (b) *Calculer* $B = \int_0^1 \frac{t-1}{t^2-5t+6}\,\mathrm{d}t$
3. *Calculer* $C = \int_0^1 \frac{3+2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

3.2 Intégration par parties

Théorème 3.5. ***Intégration par parties.***
Soient $(a,b) \in I^2$,$(u,v) \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})^2$*, alors :*

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Méthode 3.6. *L'intégration par parties est notamment utilisée lorsqu'on cherche une intégrale d'un produit du type* $P(t)e^{\lambda t}, P(t)cos(\lambda t), P(t)sin(\lambda t), P(t)ln(t)$ *ou* $P(t)arctan(t)$.
On pose par exemple $v(t) = P(t)$ *et* $u'(t) = cos(\lambda t)$*, puis on applique la formule d'intégration par partie.*
On est capable de calculer une primitive et la dérivée de chacune de ces fonctions. Avec cette méthode, le degré de la fonction polynomiale P *diminue.*

Application 3.7. *Calculer* $A = \int_{-3}^{0}(t-2)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ *et* $B = \int_0^{\pi} t^2 cos(t)\,\mathrm{d}t$.

3.3 Changement de variable

Théorème 3.8. *Soient* I *et* J *deux intervalles de* $\mathbb{R}$, $\varphi : J \to I$ *une fonction de classe* $\mathscr{C}^1$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue.*
Soit $(a,b) \in J^2$*, on a :*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

On dit que l'on procède au changement de variable $x = \varphi(t)$.

Méthode 3.9. *Procéder au changement de variable, c'est exprimer l'ancienne variable x en fonction de la nouvelle variable t.*
Il faut ensuite :

1. *modifier les bornes de l'intégrale ;*
2. *remplacer x par $\varphi(t)$;*
3. *remplacer $\mathrm{d}x$ par $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.*

Application 3.10. *Calculer :*

1. (a) *Donner la factorisation canonique de $t^2 - t + 1$*
   (b) *En déduire $J = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1}$*
2. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sin(x)cos(x)}{1+sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$
   Indications : on pourra poser $t = sin(x)$ et on rappelle que :

$$cos(Arcsin(t)) = \sqrt{1-t^2}$$

Application 3.11. *Soit f une fonction continue sur $[-a;a]$. Démontrer que :*

1. *si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$*
2. *si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$*

4 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 4.1. *Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ alors :*

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 4.2.

- *La somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ est une fonction polynomiale en x, elle est souvent appelée **polynôme de Taylor** de f à l'ordre n en a et notée $T_n(x)$*
- *L'intégrale $\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$ est appelée le **reste intégral** de f à l'ordre n en a et notée $R_n(x)$.*
- *On a alors :*

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

La formule permet donc d'approcher $f(x)$ par une expression polynomiale $T_n(x)$. Le reste intégral peut être vu comme l'erreur commise en réalisant cette approximation.

Application 4.3. *On considère la fonction $f : x \mapsto ln(1+x)$ définie sur $I =]-1; +\infty[$.*

1. *Démontrer par récurrence que $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.*
2. *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$:*

$$\mid f^{(n+1)}(x) \mid \leq n!.$$

3. *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$:*

$$\mid ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} \mid \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$