Interrogation 7 - CORRECTION

Exercice 0.1. *Déterminer les solutions sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle :*

$$(E) : y'' + 2y' - 4y = 3cos(2x)$$

On détermine les solutions de l'équation homogène :

$$(H) : y'' + 2y' - 4y = 0$$

L'équation caractéristique associée est :

$$(E_c) : r^2 + 2r - 4 = 0$$

$\Delta = 2^2 - 4 \times (-4) = 20 = 4 \times 5$ Il existe deux racines réelles :

$$r_1 = \frac{-2-2\sqrt{5}}{2} = -1 - \sqrt{5} \text{ et } r_2 = -1 + \sqrt{5}$$

Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$y_H : x \mapsto Ae^{(-1-\sqrt{5})x} + Be^{(-1+\sqrt{5})x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Reste à déterminer une solution particulière. Étant donné le second membre et $2i$ n'étant pas solution de (E_c), on cherche y_P sous la forme :

$$y_P = \lambda cos(2x) + \mu sin(2x).$$

On a : $y_P' = -2\lambda sin(2x) + 2\mu cos(2x)$ et : $y_P'' = -4\lambda cos(2x) - 4\mu sin(2x)$. D'où

$y_P'' + 2y_P' - 4y_P$
$= -4\lambda cos(2x) - 4\mu sin(2x) - 4\lambda sin(2x) + 4\mu cos(2x) - 4\lambda cos(2x) - 4\mu sin(2x)$
$= (-8\lambda + 4\mu)cos(2x) + (-4\lambda - 8\mu)sin(2x)$

Par identification des coefficients :

$$y_P'' + 2y_P' - 4y_P = 3cos(2x) \Leftrightarrow \begin{cases} -8\lambda + 4\mu = 3 \\ -4\lambda - 8\mu = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16\mu + 4\mu = 3 \\ \lambda = -2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \frac{3}{20} \\ \lambda = \frac{-3}{10} \end{cases}$$

Une solution particulière est donc $y_P : x \mapsto \frac{3}{20}cos(2x) - \frac{3}{10}sin(2x)$.
$\mathscr{S} = \left\{ y : x \mapsto \frac{-3}{10}cos(2x) + \frac{3}{20}sin(2x) + Ae^{(-1-\sqrt{5})x} + Be^{(-1+\sqrt{5})x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Exercice 0.2. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle :*

$$(E) : y' + 2ty = e^{-t^2}$$

$(H); y' + 2ty = 0$ a pour solution les fonctions

$$y_H : t \mapsto Ce^{-t^2} \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Pour obtenir une solution particulière, on utilise la méthode de variation de la constante. On cherche donc y_P sous la forme : $y_P = \lambda(t)e^{-t^2}$. Ainsi : $y_P' = \lambda'(t)e^{-t^2} - 2t\lambda(t)e^{-t^2}$. Et :

$$y_P'(t) + 2ty_P(t) = \lambda'(t)e^{-t^2} - 2t\lambda(t)e^{-t^2} + 2t\lambda(t)e^{-t^2} = \lambda'(t)e^{-t^2}$$

Donc y_P est solution particulière de (E)
$\Leftrightarrow \lambda'(t)e^{-t^2} = e^{-t^2} \Leftrightarrow \lambda'(t) = 1$ car $e^{-t^2} \neq 0$ sur $\mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow \lambda(t) = t + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
Choisissons $k = 0$ alors $y_p : t \mapsto te^{-t^2}$ est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.

$$\mathscr{S} = \left\{ y : t \mapsto te^{-t^2} + Ce^{-t^2}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$