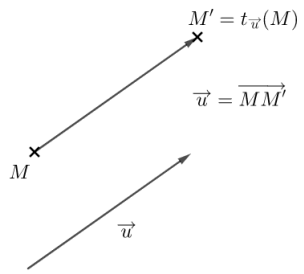
Chap.18 : Exemples de transformations affines du plan

Dans toute la suite, le plan $\mathscr{P}$ sera muni d'un repère $\mathscr{R} = (0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormé direct.

1 Translation

Définition 1.1. *Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul du plan. La* ***translation*** *de vecteur $\overrightarrow{u}$ est l'application $t_{\overrightarrow{u}} : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ définie par :*

$$\forall M \in \mathscr{P}, t_{\overrightarrow{u}}(M) = M' \text{ avec } \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$$



Proposition 1.2. *Si le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour affixe a alors :*

$$M'(z') = t_{\overrightarrow{u}}(M) \Leftrightarrow z' = z + a$$

*On dit que $z' = z + a$ est l'****écriture complexe*** *de la translation.*

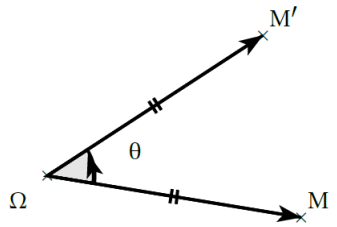
Application 1.3.

1. *Quelle est l'écriture complexe de la translation $t_{\overrightarrow{u}}(M)$ de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $2 - 3i$?*
2. *Quelle est l'image du point A d'affixe $2 - 4i$ par $t_{\overrightarrow{u}}$?*
3. *Quel point a pour image le point $B(-2 - 4i)$ par $t_{\overrightarrow{u}}$?*

2 Rotation

Définition 2.1. *Soit Ω un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$.*
*La **rotation** de centre Ω et d'angle θ est l'application $r_{\Omega,\theta} : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ définie par :*

$$\forall M \in \mathscr{P}, r_{\Omega,\theta}(M) = M' \text{ avec } \begin{cases} \| \overrightarrow{\Omega M'} \| = \| \overrightarrow{\Omega M} \| \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta + 2k\pi \end{cases}$$



Proposition 2.2. *Si le point Ω a pour affixe $w \in \mathbb{C}$ et si M a pour affixe z alors :*

$$M'(z') = r_{\Omega,\theta}(M) \Leftrightarrow z' - w = e^{i\Theta}(z - w)$$

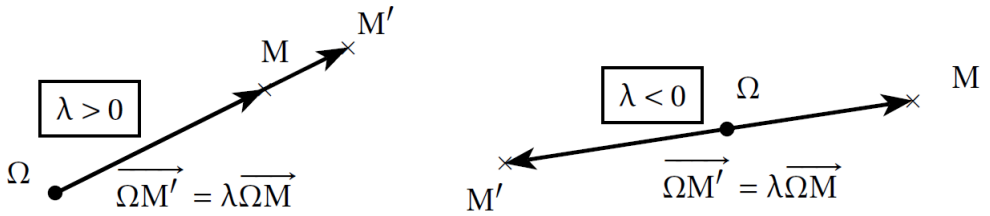
*On dit que $z' - w = e^{i\Theta}(z - w)$ est l'**écriture complexe** de la rotation.*

Application 2.3.
1. *Quelle est l'image du point $A(-3 + 3i)$ par la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{5\pi}{4}$?*
2. *Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre $\Omega(-1 + i)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.*
3. *Quelle est l'image par r du point $C(-3 + 4i)$?*

3 Homothétie

Définition 3.1. *Soit Ω un point du plan et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. L'**homothétie** de centre Ω et de rapport λ est l'application notée $h_{\Omega,\lambda} : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ telle que :*

$$\forall M \in \mathscr{P}, h_{\Omega,\lambda}(M) = M' \text{ avec } \overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$$



Remarque 3.2.
- *Si $\lambda = 1$ alors $h_{\Omega,\lambda}$ est l'application identité du plan.*
- *Si $\lambda \neq 1$ alors Ω est l'unique point fixe de l'homothétie, c'est-à-dire l'unique point qui vérifie $h_{\Omega,\lambda}(M) = M$.*
- *Si $\lambda = -1$ alors $h_{\Omega,\lambda}$ est une rotation d'angle π.*

Proposition 3.3. *Si le point Ω a pour affixe $w \in \mathbb{C}$ et si M a pour affixe z alors :*

$$M'(z') = h_{\Omega,\lambda}(M) \Leftrightarrow z' - w = \lambda(z - w)$$

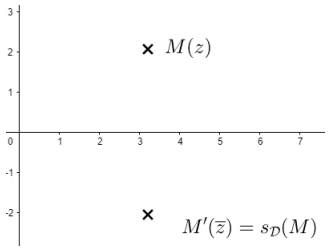
*On dit que $z' - w = \lambda(z - w)$ est l'**écriture complexe** de l'homothétie.*

Application 3.4.
1. *Quelle est l'image du point $A(3 - 2i)$ par l'homothétie de centre l'origine 0 du repère et de rapport -3 ?*
2. *Quel est le point B dont l'image par l'homothétie de centre $\Omega(2 - 4i)$ et de rapport 3 est le point $B'(-4 + 3i)$?*

4 Réflexion par rapport à l'axe des abscisses

Définition 4.1. *Soit $\mathscr{D} = \mathscr{D}(O, \overrightarrow{i})$ l'axe des abscisses. Dans le plan, la symétrie axiale par rapport à la droite $\mathscr{D}$ est appelée **réflexion** d'axe $\mathscr{D}$ et notée $s_{\mathscr{D}}$.*

Proposition 4.2. *Soit un point $M(z)$ alors : $M'(z') = s_{\mathscr{D}}(M) \Leftrightarrow z' = \overline{z}$*



Application 4.3. *Soit $\mathscr{D} = \mathscr{D}(O, \overrightarrow{i})$ l'axe des abscisses.*

1. *Quelle est l'image du point $A(-3-2i)$ par la réflexion d'axe $\mathscr{D}$?*
2. *Quel est le point B dont l'image par la réflexion d'axe $\mathscr{D}$ est le point $B'(-4-3i)$?*