

Exercices Chap.4 : Étudier le signe d'une expression

1 Etude de signe

Exercice 1.1. Dresser le tableau de signe des expressions suivantes :

1. $f_1(x) = -2x^2 - 4x - 8$

3. $f_3(x) = x^2 + 5x - 14$

2. $f_2(x) = 9x^2 + 6x - 1$

4. $f_2(x) = -2(x - 3)(1 - x)$

Exercice 1.2. Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $-2x^2 - 4x - 8 > 0$

2. $(-2x^2 - 4x - 8)(x^2 + 5x - 14) \leq 0$

3. $\frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 + 3x + 2} \geq 0$

2 Inéquations et études de signe

Exercice 2.1. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $-3x^2 + 18x < 0$

5. $\frac{4}{x-1} - \frac{3}{x+2} > 0$

2. $(3x - 1)^2 > 9(x - 1)^2$

6. $\frac{3x}{3-2x} > 4$

3. $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} \geq 0$

7. $\frac{5-x}{2+3x} < -1$

4. $\frac{2x+3}{x-3} < 1$

8. $\frac{x+4}{x-4} - \frac{x-4}{x+4} \leq \frac{4}{x^2-16}$

3 En utilisant les variations d'une fonction

Exercice 3.1. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$.

1. Étudier les variations de f .

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur \mathbb{R} .

3. En déduire le tableau de signe de f .

Exercice 3.2. Soit la fonction définie sur $I = [-2; 2]$ par $f(x) = \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}$.

1. Montrer que $f'(x) = \frac{-8x(x+1)}{(2x^2+2x+1)^2}$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur I .
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe \mathcal{C}_f avec les axes du repère orthonormé.
4. A l'aide du tableau de variation, résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 3.3. Soient les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 \text{ et } g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$$

Étudier les positions relatives des courbes représentatives \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g dans un repère orthonormé du plan.

4 Valeur absolue

Exercice 4.1. Exprimer sans valeur absolue :

1. $|x^2|$
2. $|x^3|$
3. $|x^2 + 1|$
4. $|x^3 - 1|$
5. $|x^3 - 1|$
6. $|x^3 - x^2|$

Exercice 4.2. Démontrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$$

Indication : on pourra remarquer que $2x = (x + y) + (x - y)$.

Exercice 4.3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |x^2 - x + 1| = x^2 - x + 1$

Exercice 4.4. Résoudre les équations suivantes :

1. $|1 + 3x| = x + 2$
2. $|x| + |x + 2| = 3$
3. $|x - 1| + |2x - 1| = |x + 1|$