

Exercices

Chap.30 et 31 : Limites et comparaison des fonctions

1 Limites

Exercice 1.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer en utilisant les quantificateurs que :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

Exercice 1.2. Étudier la limite en a de la fonction f pour :

1. $a = 1$ et $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$
2. $a = 0$ et $f(x) = x^3 + \frac{\sqrt{x}}{x}$
3. $a = 0$ et $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(3x)}$
4. $a = +\infty$ et $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$
5. $a \geq 0$ et $f(x) = \frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$
6. $a = 1$ et $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$
7. $a = +\infty$ et $f(x) = \ln(1+x^2) - x$
8. $a = 0$ et $f(x) = \frac{x e^{\frac{1}{x^2}}}{x^2+1}$
9. $a = 1$ et $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$
10. $a = +\infty$ et $f(x) = x \cos(x)$
11. $a = -\infty$ et $f(x) = 4 + \sqrt{x^2 - 5x} - \sqrt{x^2 - 1}$
12. $a = +\infty$ et $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$
13. $a = +\infty$ et $f(x) = \arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

2 Comparaison de fonctions

Exercice 2.1. 1. Démontrer que $e^{\sqrt{x}} = o_{x \rightarrow +\infty}(e^x)$.

2. On considère deux fonctions réelles f et g telles que $f \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g$.

A-t-on $e^f \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^g$?

Exercice 2.2. 1. Démontrer que $\sin(\arccos(x)) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}$.

2. Déterminer un équivalent simple de $\arccos(x)$ en 1.

3. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

Déterminer l'ensemble de définition de f , sa limite en $+\infty$ et un équivalent en $+\infty$. (On rappelle que $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$).

Exercice 2.3. En utilisant des équivalents, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3}{5x^2 + 2}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 1}{3x^5 + 2}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x(1-x)\tan(3x)}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+5x}{3x}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{2x}}{x}$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^{\sin x} - 1}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 3^x}{x}$
10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
11. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x+5}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{2x})}$
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-e^{2x})(1-\cos(3x))}{x^2 + 3x^4}$
13. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}, n \in \mathbb{N}$