

Programme de colle 21

Semaine du 22 mars 2021

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire (5-10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

1. Calculer les intégrales suivantes en effectuant une intégration par partie :

$$(a) I_1 = \int_0^x t \sin(t) dt \qquad (c) I_3 = \int_0^x \frac{t}{\cos^2(t)} dt, 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$$

$$(b) I_2 = \int_1^x t^n \ln(t) dt, x > 0$$

2. Calculer les intégrales suivantes en effectuant le changement de variable indiqué :

$$(a) I_1 = \int_0^x \frac{1}{e^t + e^{-t}} dt \text{ en posant } u = e^t.$$

$$(b) I_2 = \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{1}{2t^2 + 3} dt \text{ en posant } x = \sqrt{\frac{2}{3}}t.$$

$$(c) I_3 = \int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{x+1}} dx \text{ en posant } t = \sqrt{x+1}.$$

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. Pour $n \geq 0$, on définit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, encadrer $\frac{x^n}{1+x}$ si $x \in [0; 1]$.
2. Démontrer que la suite (I_n) tend vers 0.
3. Pour $k \geq 0$, calculer $I_k + I_{k+1}$.
4. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Indication : on fera apparaître une somme télescopique.

Exercice 2.2. 1. (a) Montrer que, pour tout $i \geq 2$,

$$\int_{i-1}^i \ln t \, dt \leq \ln i \leq \int_i^{i+1} \ln t \, dt.$$

(b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\int_1^n \ln t \, dt \leq \ln(n!) \leq \int_1^n \ln t \, dt + \ln n.$$

2. Pour tout $x > 0$, calculer $F(x) = \int_1^x \ln t \, dt$.

3. En déduire que $\ln(n!)$ est équivalent à $n \ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2.3. 1. En utilisant une série de Riemann, calculer la limite de la suite :

$$u_n = \frac{1}{n} \left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right) \right).$$

2. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x) \, dx$.

Indication : on pourra linéariser $\sin^4(x)$.

3 Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

Chap.36 : Dérivabilité

1 Nombre dérivée, fonction dérivée

1.1 Dérivabilité en un point

1.2 Dérivabilité à droite et à gauche en x_0

1.3 Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

2 Opérations sur les fonctions dérivables

2.1 Opérations sur les fonctions dérivables en a

2.2 Extension aux fonctions dérivables sur un intervalle

3 Propriétés des fonctions dérivables

3.1 Notion d'extremum local

3.2 Théorème de Rolle

3.3 Accroissements finis et applications

3.4 Théorème de la limite de la dérivée

4 Fonctions de classe \mathcal{C}^k

4.1 Dérivées successives

4.2 Propriétés

Formule de Leibniz.

Chap.37 : Intégration d'une fonction continue sur un segment

1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

1.1 Généralités

Valeur moyenne de f sur un intervalle $[a; b]$.

1.2 Propriétés de l'intégrale sur un segment

Positivité et croissance sur un segment.

Relation de Chasles.

Théorème de nullité.

1.3 Extension de la notation

2 Quelques résultats d'intégration numérique

2.1 Somme de Riemann et méthode des rectangles

2.2 Méthode des trapèzes

3 Calcul intégral

3.1 Intégrale et primitives

3.2 Intégration par parties

3.3 Changement de variable

4 Formule de Taylor avec reste intégral