Chap.41 : Représentation matricielle d'une application linéaire

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un élément de $\mathbb{K}$ est appelé un scalaire.
E et F désigneront deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimension finie avec :

$$dim(E) = p \in \mathbb{N} \text{ et } dim(F) = n \in \mathbb{N}.$$

1 Matrice associée à une application linéaire.

Définition 1.1. *Soient $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_p\}$ une base de E et $\mathscr{B}' = \left\{\overrightarrow{f}_1, ..., \overrightarrow{f}_n\right\}$ une base de F.*
Dans le chapitre précédent, nous avons vu qu'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est entièrement déterminée par l'image des vecteurs de $\mathscr{B}$.
Soient des coefficients $a_{i,j}$ tels que pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$f(\overrightarrow{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \overrightarrow{f}_i$$

*On appelle **matrice de l'application linéaire** f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, la matrice :*

$$A = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p-1} & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p-1} & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p-1} & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Dans cette matrice, $a_{i,j}$ désigne la $i^{ième}$ coordonnées du vecteur $f(\overrightarrow{e}_j)$ dans la base $\left\{\overrightarrow{f}_1, ..., \overrightarrow{f}_n\right\}$.

Proposition 1.2. *Avec les notations de la définition 1.1 :*

- *si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ est la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{x}$ dans $\mathscr{B}$;*
- *si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ est la matrice colonne des coordonnées de $f(\overrightarrow{x})$ dans $\mathscr{B}'$;*

alors :

$$Y = AX$$

Méthode 1.3. *Pour écrire la matrice de $f \in \mathscr{L}(E,F)$ dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$:*

1. *on détermine les images par f de chaque vecteur de la base $\mathscr{B}_E$;*
2. *on exprime ces images dans la base $\mathscr{B}_F$;*
3. *on écrit en colonnes les coordonnées obtenues.*

Application 1.4. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \mapsto (2x+z, 3x-4y) \end{array} \right.$.
On admet que f est linéaire. Écrire la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$.

Application 1.5. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X] \\ P \mapsto P' \end{array} \right.$.
On admet que f est linéaire. Écrire la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et de $\mathbb{R}_2[X]$.

Application 1.6. *Soient $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ et $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a :*

$$Mat_{\mathscr{C},\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer l'expression analytique de f.*
2. *Déterminer une base de $Ker(f)$.*

3. Déterminer une base de $Im(f)$.

Application 1.7. *Soit* $u : \begin{cases} \mathbb{K}_2[X] \to \mathbb{K}_3[X] \\ P \mapsto 2(X^2 - X + 1)P - (X^3 + 1)P'(X + 1) \end{cases}$.
On admet que $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}_2[X], \mathbb{K}_3[X])$.
Écrire la matrice de u dans les bases canoniques de $\mathbb{K}_2[X]$ et $\mathbb{K}_3[X]$.

Application 1.8. *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$.
On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de base $\mathscr{B} = \{1, i\}$.
Soit l'application : $f : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto e^{i\theta}\overline{z} \end{cases}$.

1. *Démontrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C})$.*
2. *Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.*

Proposition 1.9. *Avec les notions de la définition 1.1, l'application :*

$$\psi : \begin{cases} \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E, F) \to \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f \mapsto Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) \end{cases}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}-$espaces-vectoriels. On en déduit :

$$dim(\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E, F)) = dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p$$

Soit une matrice$A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'application $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ telle que

$$f = \psi^{-1}(A)$$

*est appelée l'**application linéaire associée** à A dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.*

Remarque 1.10. *En particulier, si $A = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$, $B = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(g)$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors :*

$$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f+\lambda g) = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) + \lambda Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(g)$$

Proposition 1.11. ***Matrice d'une composée***
Soient E, F et G des espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$.
Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$, alors :

$$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}(g \circ f) = Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}(g) \times Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$$

2 Rang d'une matrice

Définition 2.1. *Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle* ***application linéaire canoniquement associée*** *à A, l'application linéaire $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ dont la matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et de $\mathbb{K}^n$ est A.*

On appelle ***rang de la matrice*** *A le rang de cette application linéaire associée. On note :*

$$rg(A) = rg(f) = dim(Im(f)$$

Application 2.2. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. *Déterminer le rang de A.*

Théorème 2.3. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et n. Le rang d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est égal au rang de sa matrice dans n'importe quelles bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E et F :*

$$rg(f) = rg(Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f))$$

Cela signifie en particulier que le rang de f ne dépend pas des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ choisies.

3 Changement de base

3.1 Matrice de passage d'une base à une autre

Définition 3.1. *On note* $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ *et* $\mathscr{B}' = \left\{\overrightarrow{e'}_1, ..., \overrightarrow{e'}_n\right\}$ *deux bases d'un même* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel* E*.*
On appelle ***matrice de passage*** *de la base* $\mathscr{B}$ *à la base* $\mathscr{B}'$ *la matrice de l'application* id_E *relativement aux bases* $\mathscr{B}'$ *et* $\mathscr{B}$ *:*

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(id_E) = \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,j} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & \cdots & p_{2,j} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,j} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}$$

si pour $j \in [\![1;n]\!]$, $\overrightarrow{e'}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} \overrightarrow{e}_i$

Application 3.2. *Soit* $E = \mathbb{R}_2[X]$*. On considère*

$$\mathscr{C} = \{1, X, X^2\} \text{ et } \mathscr{B} = \{1, X-1, (X-1)^2\}$$

deux bases de E*.*
Donner la matrice de passage :

1. *de* $\mathscr{B}$ *à* $\mathscr{C}$*.*
2. *de* $\mathscr{C}$ *à* $\mathscr{B}$*.*

Proposition 3.3. *Soit* E *un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel de dimension finie, et* $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ *deux bases de* E*.*
Alors $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ *est inversible et :*

$$P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$$

Preuve :

3.2 Effets d'un changement de base

Proposition 3.4. ***Sur les coordonnées d'un vecteur.***
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n et $\overrightarrow{x} \in E$. Soient $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ deux bases de E.
On note :

- *$(x_1, ..., x_n)$ les coordonnées de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathscr{B}$*
- *$(x'_1, ..., x'_n)$ les coordonnées de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathscr{B}'$*

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x_{1'} \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ les matrices colonnes respectives des coordonnées de $\overrightarrow{x}$ dan ces deux bases.
Alors :

$$X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} X'$$

En d'autres termes, $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ permet d'aller de la nouvelle base ($\mathscr{B}'$) à l'ancienne base ($\mathscr{B}$).

Application 3.5. *Soient $\overrightarrow{u}_1 = (1,2,0), \overrightarrow{u}_2 = (0,2,1)$ et $\overrightarrow{u}_3 = (1,1,1)$ exprimés dans la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^3$.*

1. *Démontrer que $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis écrire $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$.*
2. *Exprimer les coordonnées de $\overrightarrow{u} = (1,4,7)$ (donné dans $\mathscr{C}$) dans la base $\mathscr{B}$.*

Proposition 3.6. ***Sur la matrice d'une application linéaire.***
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F), \mathscr{B}_E, \mathscr{B}'_E$ deux bases de E, $\mathscr{B}_F, \mathscr{B}'_F$ deux bases de F.

$$Mat_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}'_F}(f) = (P_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}'_F})^{-1} \times Mat_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \times P_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E}$$

Preuve :

Proposition 3.7. *Soient $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ un endomorphisme de E, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Alors :*

$$Mat_{\mathscr{B}'}(f) = (P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1} \times Mat_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$$

Définition 3.8. *Deux matrices A et B sont dites* ***semblables*** *lorsqu'il existe une matrice inversible P telle que :*

$$B = P^{-1}AP$$

Application 3.9. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_2\left[X\right] \to \mathbb{R}_2\left[X\right] \\ P = aX^2 + bX + c \mapsto (3c - b + a) + (2c + a)X + aX^2 \end{array} \right.$

On admet que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2\left[X\right])$ et on note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2\left[X\right]$.

1. *Écrire la matrice A de f dans $\mathscr{B}$.*
2. *Soient $P_0 = 1 + X + X^2, P_1 = X + X^2$ et $P_2 = 1 + X$.*
   (a) *Démontrer que $\mathscr{B}' = \{P_0, P_1, P_2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2\left[X\right]$.*
   (b) *Écrire la matrice de passage $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.*
3. *On admet que $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$. Déterminer la matrice A' de f dans $\mathscr{B}'$.*
4. *f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_2\left[X\right]$?*

Application 3.10. *Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^2$.*

On donne $\overrightarrow{u}_1 = (-2, 3)$ et $\overrightarrow{u}_2 = (-2, 5)$.

1. *Démontrer que $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.*
2. *Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.*
3. *Démontrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.*
4. *En déduire le calcul de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.*

4 Matrices d'endomorphismes particuliers

Proposition 4.1. ***Homothétie.*** *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n et $\lambda \in \mathbb{K}$.*
Dans toute base de E, la matrice de l'homothétie vectorielle h_λ est :

$$Mat_{\mathscr{B}}(h) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n$$

Proposition 4.2. ***Projecteurs.*** *Soit $E = F \oplus G$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n tel que $dim(F) = r$ et $dim(G) = n - r$.*
On sait que si $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ sont des bases de F et de G alors $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$ est une base de E.
Dans la base $\mathscr{B}$, la matrice du projecteur p sur F parallèlement à G est :

$$Mat_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

Proposition 4.3. ***Symétries.*** *Soit $E = F \oplus G$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n tel que $dim(F) = r$ et $dim(G) = n - r$.*
On sait que si $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ sont des bases de F et de G alors $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$ est une base de E.
Dans la base $\mathscr{B}$, la matrice de la symétrie s par rapport à F parallèlement à G est :

$$Mat_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$