# Chap.3 : Fonctions polynômiales de degré 2 ou 3

## 1 Fonctions polynômiales de degré 2

Dans tout ce qui suivra, $a, b$ et $c$ désigneront trois nombres réels avec $a \neq 0$.

### 1.1 Définition et vocabulaire

**Définition 1.1.** *On appelle **fonction polynomiale du second degré**, toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

*La courbe représentative d'une fonction polynomiale du second degré dans un repère orthonormal est appelée une **parabole**.*
*On appelle **équation du second degré** d'inconnue $x$, toute équation pouvant s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.*

**Application 1.2.** *Les équations suivantes peuvent-elles se ramener à la résolution d'une équation du second degré ?*

1. $E_1 : x^3 - 3x(x+3) - x^2(x+1) - 2 = 0$
2. $E_2 : \frac{3x+4}{x^2+1} = \frac{3x+1}{x^2+2}$
3. $E_3 : \frac{2x^4+2x^2-3x+4}{x^2+1} = 4$

### 1.2 Forme canonique d'une fonction polynomiale de degré 2

**Théorème 1.3.** *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ :*

$$ax^2 + bx + c = a\left[(x + \tfrac{b}{2a})^2 - \tfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

*L'écriture de droite est appelée **forme canonique** de la fonction polynomiale $x \mapsto ax^2 + bx + c$.*

**Preuve :**

**Méthode 1.4.** *La formule du théorème précédent n'est pas à connaître par coeur, mais il faut connaître la manière de l'obtenir sur des exemples.*

1. *On factorise par a :* $ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$
2. *On remarque que* $x^2 + \frac{b}{a}x = (x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2$
3. *On ré-écrit l'expression initiale* $ax^2+bx+c = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}\right]$

**Application 1.5.** *Donner la forme canonique des fonctions polynomiales suivantes :*

1. $f(x) = 2x^2 + 12x + 19$
2. $g(x) = -3x^2 + 12x + 15$
3. $h(x) = 4x^2 + 12x + 9$

### 1.3 Variations d'une fonction polynomiale du second degré

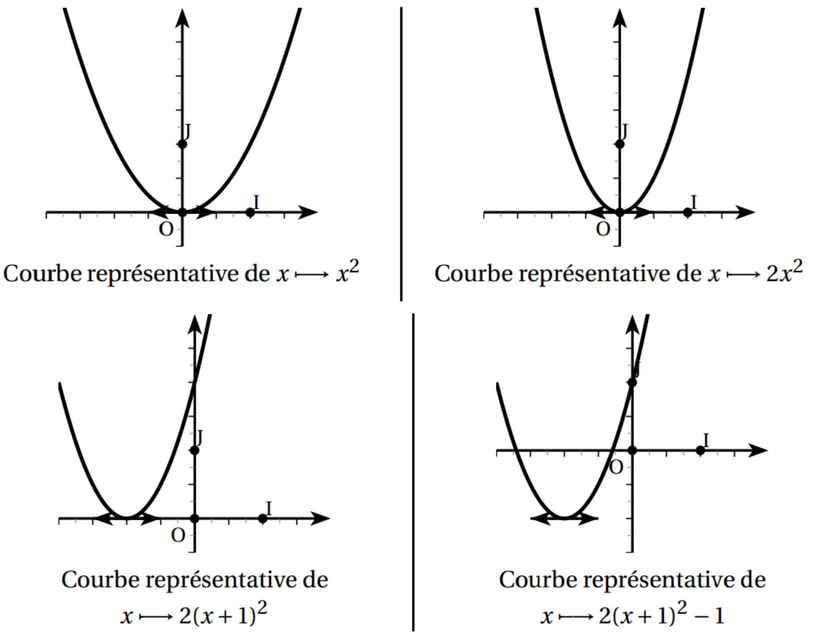
**Proposition 1.6.** *Les variations de la fonction $x \mapsto x^2$ sont données par :*

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x \mapsto x^2$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

*La courbe représentative de la fonction carrée est une parabole ayant :*

- *pour sommet le centre du repère*
- *pour axe de symétrie l'axe des ordonnées*
- *des branches "tournées vers le haut"*

**Remarque 1.7.** *La forme canonique permet d'obtenir l'allure de la représentation graphique ainsi que les variations d'une fonction polynomiale du second degré.*
*Prenons l'exemple de* $f(x) = 2(x+1)^2 - 1$.




Courbe représentative de $x \longmapsto x^2$

Courbe représentative de $x \longmapsto 2x^2$

Courbe représentative de $x \longmapsto 2(x+1)^2$

Courbe représentative de $x \longmapsto 2(x+1)^2 - 1$

**Application 1.8.** *Soit la fonction polynomiale* $f(x) = -2x^2 - 12x - 22$. *Tracer l'allure de la courbe représentative de* $f$. *Existe-il un minimum ? Un maximum ? Le déterminer et indiquer en quelle valeur il est atteint.*

**Proposition 1.9.** *Les variations de* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *dépendent du signe de* $a$ *:*

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x \mapsto x^2$ *si a>0* | $+\infty$ | $\searrow$ | $f(\frac{-b}{2a})$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x \mapsto x^2$ *si a<0* | $-\infty$ | $\nearrow$ | $f(\frac{-b}{2a})$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

*Le point de la courbe représentative ayant pour abscisse $\frac{-b}{2a}$ (donc correspondant au minimum ou maximum de $f$) est appelé le* ***sommet*** *de la parabole.*
*La courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2, dans un repère orthogonal, admet un axe de symétrie : la droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$.*

**Application 1.10.** *Soit la fonction polynomiale définie par*

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 1.$$

1. *Résoudre l'équation $f(x) = -1$*
2. *Dresser le tableau de variation de $f$*
3. *Quelles sont les coordonnées du sommet de $\mathscr{C}_f$*
4. *L'équation $f(x) = 9$ possède-t-elle une solution ? Pourquoi ?*

## 1.4 Racines d'une fonction polynomiale du second degré

**Définition 1.11.** *Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, lorsqu'elles existent, sont appelées* ***racines*** *de la fonction polynomiale.*

**Application 1.12.**
1. *$-2$ est-il une racine de $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ ?*
2. *$1$ est-il une racine de $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ?*

**Théorème 1.13.** *Le réel $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé le* ***discriminant*** *de la fonction polynomiale $f(x) = ax^2 + bx + c$.*
*On dispose d'un algorithme afin de déterminer les racines de $f$ :*

- *Étape 1 : on calcule $\Delta$*
- *Etape 2 : trois cas sont possibles selon le signe de $\Delta$ :*
  - *si $\Delta > 0$ alors il existe deux racines* ***réelles*** *distinctes :*
    $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
  - *si $\Delta = 0$ alors il existe une* ***unique*** *racine $x_0 = \frac{-b}{2a}$*
  - *si $\Delta < 0$ alors il n'existe pas de racines réelles mais deux racines* ***complexes*** *conjuguées :*
    $$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

**Application 1.14.** *Résoudre les équations suivantes :*

1. $x^2 - 6x + 4 = 0$
2. $-2x^2 + 7x - 2 = 0$
3. $2x^2 = 3x + 1$
4. $2x^2 + 3x = 2$

# 2 Factorisation de fonctions polynomiales

## 2.1 Fonctions polynomiales du second degré

**Théorème 2.1.** *On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de la fonction polynomiale $f(x) = ax^2 + bx + c$.*

1. *si $\Delta > 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où $x_1$ et $x_2$ sont les racines réelles définies dans le Théorème*
2. *si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ où $x_0$ est l'unique racine réelle définies dans le Théorème*
3. *si $\Delta < 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ où $z_1$ et $z_2$ sont les racines complexes définies dans le Théorème*

**Application 2.2.** *Factoriser les fonctions polynomiales suivantes, éventuellement dans $\mathbb{C}$ :*

1. $f(x) = x^2 - 6x + 4$
2. $f(x) = -2x^2 + 7x - 2$
3. $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$
4. $f(x) = x^2 - x + 1$

**Application 2.3.** *Déterminer une fonction du second degré admettant* 1 *et* 2 *comme racine réelle et telle que* $f(-1) = 18$

## 2.2 Fonctions polynomiales de degré 3

Dans tout ce qui suivra, $a, b, c$ et $d$ désignent quatre nombre réels tels que $a \neq 0$.

**Définition 2.4.** *On appelle* ***fonction polynomiale de degré 3****, toute fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.*
*On appelle* ***équation de degré 3*** *d'inconnue $x$, toute équation pouvant s'écrire sous la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.*

- *Le coefficient $a$ est appelé coefficient du terme de degré 3 ;*
- *le coefficient $b$, coefficient du terme de degré 2 ;*
- *le coefficient $c$ coefficient du terme de degré 1 ;*
- *$d$ est appelé le terme constant.*

**Définition 2.5.** *Soit $f$ une fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

*Toute solution de l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ est appelée* ***racine*** *de la fonction polynomiale.*

**Proposition 2.6.** *Toute fonction polynomiale de degré 3 admet au moins une racine dans $\mathbb{R}$.*

**Preuve :**

**Théorème 2.7.** *Soit $f$ une fonction polynomiale de degré 3, dont le coefficient du terme de degré 3 est non nul, et soit une racine $x_0$ de $f$.*
*Alors il existe trois nombres réels $\alpha, \beta$ et $\gamma$ tels que :*

$$f(x) = (x - x_0)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$$

*On dit alors que $f$ est **factorisable** par $x - x_0$ et comme vu dans le Théorème 2.1, la fonction polynomiale $x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ est éventuellement encore factorisable dans $\mathbb{R}$.*
***Factoriser** une fonction polynomiale de degré 3 dans $\mathbb{R}$, c'est poursuivre le processus de factorisation autant qu'il est possible.*

**Méthode 2.8.** *Soit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Pour factoriser $f$ :*

1. *On recherche une "racine évidente" $x_0$, c'est à dire un nombre vérifiant $f(x_0) = 0$*
2. *On peut alors écrire que $f(x) = (x - x_0)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$ où $\alpha, \beta$ et $\gamma$ sont des nombres réels à déterminer*
3. *On développe l'expression $(x - x_0)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$ et on détermine $\alpha, \beta$ et $\gamma$ par identification avec les coefficients de $f$*
4. *On factorise, si cela est possible, $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$*
5. *On écrit enfin la factorisation de $f$*

**Application 2.9.** *Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$.*

1. (a) *Calculer $f(2)$.*
   (b) *Déterminer trois réels $a, b$ et $c$ tels que $f(x) = (x-2)(ax^2+bx+c)$.*
2. *Déterminer les racines de $f$.*

**Application 2.10.** *Factoriser la fonction polynomiale de degré 3*

$$f(x) = x^3 + x - 2$$

## 3 Fractions rationnelles

**Définition 3.1.** *on dit qu'une fonction $f$ est une* ***fraction rationnelle*** *lorsqu'elle peut s'écrire sous la forme $f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$ où $n$ et $d$ sont des fonctions polynomiales.*
***Attention ! ! !*** *Une fraction rationnelle n'est pas toujours définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.*

**Proposition 3.2.** $\frac{n(x)}{d(x)} = 0 \iff \begin{cases} n(x) = 0 \\ et \\ d(x) \neq 0 \end{cases}$

**Application 3.3.** *Soit la fonction rationnelle $f(x) = \frac{2x^2-5x-3}{x^2+3x+2}$.*

1. *Déterminer l'ensemble de définition de $f$.*
2. *Résoudre l'équation $f(x) = 0$.*

**Application 3.4.** *Déterminer des réels $a, b$ et $c$ tels que pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ :*

$$\frac{x^2+3x-1}{x-1} = ax + b + \frac{c}{x-1}$$