

Exercices Chap.40 : Applications linéaires

1 Généralités

Exercice 1.1. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z).$$

1. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
2. Déterminer une base de $\text{ker}(f)$.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 1.2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démontrer que $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM - MA \end{cases}$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1.3. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit u l'application de E dans lui-même par

$$u(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E .
2. Déterminer une base de $\text{Im}(u)$.
3. Déterminer une base de $\text{ker}(u)$.
4. Montrer que $\text{ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels en somme directe. Sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$?

Exercice 1.4. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soit f l'application définie sur E par $f(P) = P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X)$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E .
2. Quel est le degré de $f(X^p)$? En déduire $\text{ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$. Quelles sont leurs dimensions respectives ?
3. Soit Q un polynôme de $\text{Im}f$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme P tel que $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

2 Projecteurs et symétries

Exercice 2.1. Soit $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que :

$$f(x, y, z) = (2x + y + 2z, y, -x - y - z)$$

1. Vérifier que f est linéaire.
2. Démontrer que f est un projecteur.
3. Déterminer les éléments caractéristiques de f .
4. Si f est un projecteur sur F_1 parallèlement à F_2 , donner l'expression analytique de la symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2 .

Exercice 2.2. Soit $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $v_1 + v_2 + v_3 = 1$.

On considère l'application $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{u} = (x, y, z) \mapsto \vec{u} - (x + y + z)\vec{v} \end{cases}$.

1. Démontrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrer que ϕ est un projecteur.
3. Déterminer les éléments caractéristiques de ϕ .