Exercices
Chap.14 : Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1 Premier ordre, à coefficients constants

Exercice 1.1. *Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:*

1. $y' - 2y = 0$
2. $3y' + 5y = 0$
3. $y' + 3ty = 0$
4. $y' + (1 + t^2)y = 0$

Exercice 1.2. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :*

1. $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$;
2. $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$;
3. $y' + y = xe^{-x}$;
4. $y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$;

2 Variation de la constante

Exercice 2.1. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

1. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ *sur* $\mathbb{R}$;
2. $(1 + x)y' + y = 1 + \ln(1 + x)$ *sur* $]-1, +\infty[$;
3. $y' - \frac{y}{x} = x^2$ *sur* $]0, +\infty[$;
4. $y' - 2xy = -(2x - 1)e^x$ *sur* $\mathbb{R}$;
5. $y' - \frac{2}{t}y = t^2$ *sur* $]0, +\infty[$;

Exercice 2.2. *Avec une condition initiale*
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + \tan(t)y = \sin(2t)$, $y(0) = 1$ *sur* $]-\pi/2, \pi/2[$;
2. $(x + 1)y' + xy = x^2 - x + 1$, $y(1) = 1$ *sur* $]-1, +\infty[$ *(on pourra rechercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme).*

3 Un peu de technique...

Exercice 3.1. *Soit* $(E) : y' - \frac{y}{x^2} = x - \frac{1}{2x}$.

1. *Résoudre l'équation homogène associée* (H) *sur* $]0; +\infty[$

2. *Chercher une solution particulière* y_0 *de* (E) *sur* $]0;+\infty[$ *sous la forme d'un polynôme de degré 2.*
3. *En déduire la solution* f *de* (E) *sur* $]0;+\infty[$ *vérifiant* $f(1)=0$.

Exercice 3.2. *On considère l'équation différentielle* $(E): xy'+y=\frac{1}{1+x^2}$.

1. *Résoudre l'équation différentielle sur* $]0;+\infty[$.
2. *Déterminer la solution* f *de* (E) *sur* $]0;+\infty[$ *telle que* $f(1)=\frac{\pi}{2}$.

4 Application aux sciences

Exercice 4.1. *Un corps de masse* m *est lâché en chute libre sans vitesse initiale. Sa vitesse* v *est solution de l'équation différentielle* $y'+\frac{k}{m}y=g$ *où* k *est le coefficient de freinage et* g *l'accélération de la pesanteur.*
Démontrer que $v(t)=\frac{gm}{k}(1-e^{\frac{-k}{m}t})$.

Exercice 4.2. *Aux bornes d'une bobine de résistance* R *(en Ohms) et d'inductance* L *(en Henrys), on branche, à l'instant* $t=0$, *un générateur de force électromotrice* E *(en Volts). L'unité de temps est la seconde. L'intensité du courant dans le circuit (en Ampères) est une fonction dérivable du temps, notée* i. *À l'instant* $t=0$, *l'intensité est nulle. Lorsque l'on établit le courant, la fonction* i *est solution de l'équation différentielle :*

$$(\mathscr{E}): Li'+Ri=E$$

Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} i(t)$ *dans le cas où* $R=5\Omega$, $L=\frac{1}{2}H$ *et* $E=3V$.