

Chap.36 : Polynômes

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un élément de $\mathbb{K}$ est appelé un scalaire.

1 Polynôme à une indéterminée

1.1 Définitions

Définition 1.1. On appelle **polynôme à une indéterminée** dans $\mathbb{K}$ toute expression de la forme :

$$P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n = \sum_{i=0}^n a_iX^i$$

Les $a_i \in \mathbb{K}$ sont appelés les **coefficients** du polynôme P .

Les termes a_iX^i sont appelés les **monômes** du polynôme.

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée dans $\mathbb{K}$.

$P(X) = 0$ est appelé le **polynôme nul**.

$P(X) = 1$ est appelé le **polynôme unité**.

$P(X) = a_0$ avec $a_0 \in \mathbb{K}$ est appelé **polynôme constant**.

Remarque 1.2. L'intérêt de l'introduction de la notion mathématique de "polynôme formel" réside principalement dans les différents rôles que l'on peut assigner à l'indéterminée X : ce peut être une matrice, une fonction, une application linéaire, une variable aléatoire...on peut remplacer X par tout élément dont on peut déterminer les puissances.

En mathématiques, le polynôme $P(X) = X^2 - 3X + 2$ et la fonction polynomiale $f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$ désignent deux objets différents.

On identifie parfois les deux, mais il s'agit alors d'un abus de notation (autorisé).

Définition 1.3. Soit $P = \sum_{i=0}^n a_iX^i \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul. On ap-

pelle **degré** de P le plus grand indice $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $a_i \neq 0$.

Le degré d'un polynôme non nul P est noté **deg**(P).

Le coefficient du monôme de plus haut degré est appelé **coefficient dominant** du polynôme.

Un polynôme de coefficient dominant égal à 1 est dit **unitaire**.

Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.

Définition 1.4. L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}^*$ est noté $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple 1.5. • Le polynôme $P = 1 - 2X + 3X^2 - 5X^6$ est de degré 6, on note $\deg(P) = 6$. Son coefficient dominant est $a_6 = 5$.

- Les polynômes de degré 0 sont les polynômes non nuls constants : $P = a_0$ où $a_0 \in \mathbb{K}^*$.

1.2 Opérations

Dans tout ce qui suit, $P = \sum_{i=0}^p a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^q b_i X^i$ désignent deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

Définition 1.6. • La somme de P et de Q est le polynôme noté $P + Q$ défini par :

$$P + Q = \sum_{i=0}^{\max(p,q)} (a_i + b_i) X^i$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, le polynôme λP est défini par :

$$\lambda P = \sum_{i=0}^p (\lambda a_i) X^i$$

- Le produit de P et de Q est le polynôme noté PQ défini par :

$$PQ = \sum_{i=0}^{p+q} c_i X^i$$

$$\text{avec } c_i = \sum_{m+n=i} a_m b_n = \sum_{k=0}^i a_k b_{i-k} \text{ avec } \begin{cases} a_k = 0 \text{ si } k > p \\ b_k = 0 \text{ si } k > q \end{cases}$$

Application 1.7. Soit $P = 1 - 3X + 4X^2$ et $Q = 2 + X + 2X^2 + X^3$. Écrire le polynôme PQ et déterminer $\deg(PQ)$.

- si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ alors $\deg(\lambda P) = \deg(P)$;
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q) = 2 + 2 = 4.$$

1. $P = 4X^3 - X^2 + X - 2$ et $Q = -4X^3 + X^2 + 5X - 4$
2. $P = 2X^3 - 2X^2 + X - 2$ et $Q = -2X^3 + X^2 + 5X - 4$
3. $P = 3X^4 - 2X^2 + X - 2$ et $Q = 4X^4 + X^2 + 5X - 4$
4. $P = 2X^4 - 2X^2 + X - 2$ et $Q = -2X^3 + X^2 + 5X - 4$

[illegible]
$$P \circ Q = P(Q) = a_0 + a_1Q + a_2Q^2 + \dots + a_pQ^p = \sum_{i=0}^p a_iQ^i$$
[illegible]

Proposition 1.13. Si Q n'est pas le polynôme nul alors :

$$\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q).$$

1.3 Fonction polynomiale associée

Définition 1.14. $P = \sum_{i=0}^p a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$. On appelle **fonction polynomiale associée** au polynôme P la fonction f définie sur $\mathbb{K}$ par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto \sum_{i=0}^p a_i x^i \end{cases}$$

On note parfois $\tilde{P}$ la fonction polynomiale associée au polynôme P .
Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on retrouve les fonctions polynomiales connues.

Proposition 1.15. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. La fonction polynomiale associée à P est la fonction nulle si, et seulement si, tous les coefficients de P sont nuls.

2 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

2.1 Divisibilité

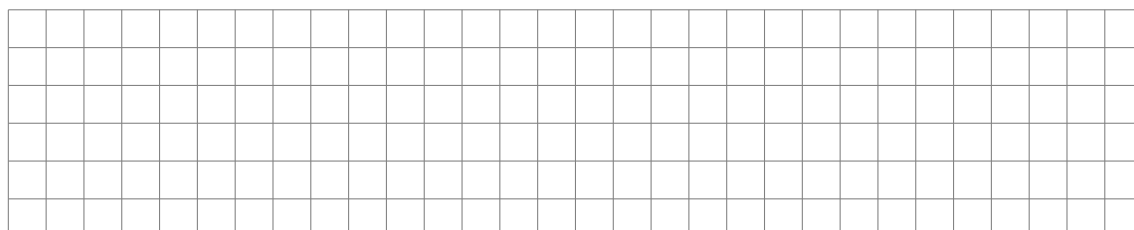
Définition 2.1. Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que :

- A est un **multiple** de B lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = B \times Q$;
- B est un **diviseur** de A lorsque A est un multiple de B . On notera $B \mid A$.

Proposition 2.2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul.

- P est divisible par tous les polynômes constants non nuls et par ceux de la forme λP avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
- Les diviseurs de P ont tous un degré inférieur ou égal à celui de P .

Application 2.3. Soit $A = 2X^3 + X^2 - 13X + 6$ et $B = 2X^2 + 5X - 3$.
Démontrer que B est un diviseur de A .



2.2 Division euclidienne

Théorème 2.4. Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$.

Il existe un unique couple de polynômes $(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que :

- $A = BQ + R$ et
- $\deg(R) < \deg(B)$

Q et R sont respectivement appelés le **quotient** et le **reste** de la division euclidienne de A par B .

Proposition 2.5. Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$.

B divise $A \Leftrightarrow$ le reste de la division euclidienne de A par B est nul

Méthode 2.6. Vidéo : Exemple en ligne.

Application 2.7. Effectuer la division euclidienne de

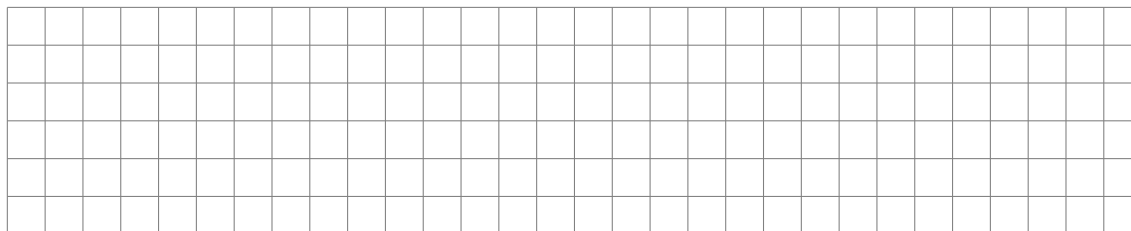
$$A = 2X^4 + X^3 - X^2 + X + 1 \text{ par } B = 2X^2 - X - 2.$$

A est-il un multiple de B ?

Application 2.8. Effectuer la division euclidienne de $A = 2X^3 + X^2 - 13X + 6$ par $B = 2X^2 + 5X - 3$.

Vérifier que A est un multiple de B .

Application 2.9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $A = X^n$ par $B = X - 1$.



Remarque 2.10. Polynômes en Python Le module *polynomial* de *numpy* permet de manipuler facilement les polynômes. Ces derniers sont définis à partir de leurs coefficients.

Par exemple, si $P(X) = 1 - X + 4X^2 + 2X^3$ et $Q(X) = X + X^2$:

```
• from numpy.polynomial import *
• P=Polynomial([1,-1,4,2])
• Q=Polynomial([0,1,1])
• print('coeff de P : ',P.coef)
• print('Degre de P : ',P.degree())
• print('Coeff de P*Q : ',(P*Q).coef)
• print('Coeff du quotient de la division eucl de P par Q',(P//Q).coef)
• print('Coeff du reste de la division eucl de P par Q',(P%Q).coef)

'''
coeff de P : [ 1. -1.  4.  2.]
Degre de P : 3
Coeff de P*Q : [ 0.  1.  0.  3.  6.  2.]
Coeff du quotient de la division eucl de P par Q : [ 2.  2.]
Coeff du reste de la division eucl de P par Q : [ 1. -3.]
>>>
```

3 Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

3.1 Polynôme dérivé et propriétés

Définition 3.1. Soit $P = \sum_{i=0}^p a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$.

On appelle **polynôme dérivé** de P le polynôme noté P' défini par :

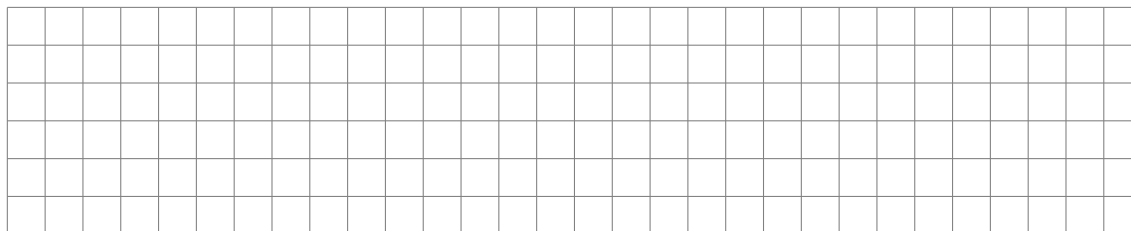
$$P' = \sum_{i=1}^p i a_i X^{i-1} = a_1 + 2a_2 X + \dots + n a_n X^{n-1}$$

Exemple 3.2. Le polynôme dérivé de $P = 4X^5 - 3X^3 + 4$ est $P' = 20X^4 - 9X^2$.

Remarque 3.3. La fonction polynomiale associée au polynôme P' est la dérivée de la fonction polynomiale associée au polynôme P .

Application 3.4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} X^k$.

Démontrer que $P'_n = P_{n-1}$.



Proposition 3.5. Soient P et Q des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors :

- $(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$
- $(PQ)' = P'Q + PQ'$

3.2 Dérivées d'ordres supérieurs, formule de Leibniz

Définition 3.6. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle dérivée d'ordre n de P le polynôme noté $P^{(n)}$ défini par :

$$P^{(0)} = P \text{ et } P^{(n)} = (P^{(n-1)})'$$

Remarque 3.7. Un polynôme de degré n a sa dérivée $n^{\text{ième}}$ dans $\mathbb{K}_0[X]$. Par exemple, si $P = 5X^4 - 3X^2 + 2X - 4$ alors :

- $P^{(1)} = P' = 20X^3 - 6X + 2$
- $P^{(2)} = 60X^2 - 6$
- $P^{(3)} = 120X$
- $P^{(4)} = 120$
- $P^{(n)} = 0$ si $n \geq 5$

Remarque 3.8. Dérivée d'ordre i en 0

Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$. On remarque que :

- $P^{(0)}(0) = P(0) = a_0$
- $P^{(1)} = P' = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 + \dots + na_nX^{n-1}$ donc $P^{(1)}(0) = a_1$
- $P^{(2)} = 2a_2 + 3 \times 2a_3X + \dots + n(n-1)a_nX^{n-2}$ donc $P^{(2)}(0) = 2 \times 1 \times a_2$
- $P^{(3)} = 3 \times 2 \times 1a_3 + 4 \times 3 \times 2a_4X + \dots + n(n-1)a_nX^{n-3}$

$$\text{donc } P^{(3)}(0) = 3 \times 2 \times 1a_3$$

- $P^{(4)} = 4 \times 3 \times 2a_4 + \dots + n(n-1)(n-2)a_nX^{n-4}$ donc $P^{(4)}(0) = 4 \times 3 \times 2 \times 1a_4$

On obtient donc $P^{(i)}(0) = i!a_i$ c'est-à-dire :

$$a_i = \frac{P^{(i)}(0)}{i!}$$

Théorème 3.9. Formule de Taylor pour les polynômes

Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$ alors :

Application 3.10. Soit $P = 5X^5 - 4X^3 - 2X^2 + 4$. Que valent $P^{(3)}(0)$ et $P^{(4)}(0)$?

[illegible]

Soient P et Q des polynômes de $\mathbb{K}[X]$, alors :

Application 3.12. En utilisant la formule de Leibniz, expliciter la dérivée 3ème du polynôme $R = (3X^2 - 4X + 1)(X^3 + 1)$.

[illegible]
$$\deg(P^{(k)}) = \deg(P) - k$$
$$P^{(n)} = n!a_n$$

4.1 Définition et premières propriétés

$$P(a) = 0.$$

Remarque 4.2. Les racines d'un polynôme sont obtenues avec Python par la méthode **roots**. Par exemple, pour $P = X^3 - 10X^2 + 29X - 20$:

```
•from numpy.polynomial import*
•P=Polynomial([-20,29,-10,1])
•print(P.roots())
```

Le résultats affiché est :

```
>>>
[ 1.  4.  5.]
>>>
```

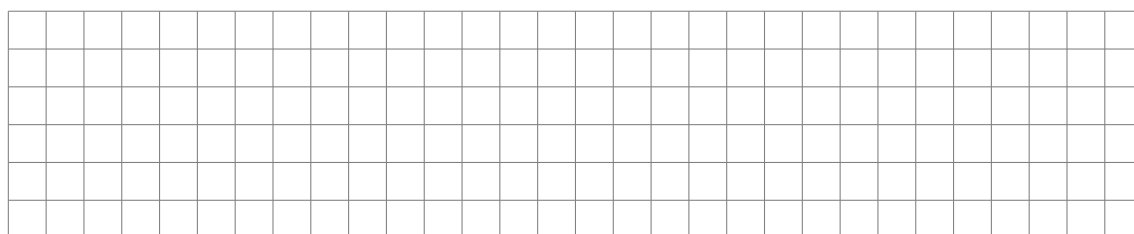
Attention : la méthode **roots** ne fournit que des valeurs approchées des racines !

Proposition 4.3. Il y a équivalence entre :

- $a \in \mathbb{K}$ est une racine de P
- P est divisible par le polynôme $X - a$

Application 4.4. Soit $P = X^3 - 10X^2 + 29X - 20$.

1. Démontrer que 1 est une racine de P .
2. En déduire les autres racines de P .



Proposition 4.5. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, si $a \in \mathbb{C}$ est racine de P alors $\bar{a}$ est également une racine de P .

4.2 Multiplicité des racines d'un polynôme

Définition 4.6. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, si $a \in \mathbb{K}$ une racine de P .

On appelle **multiplicité** de la racine a , le plus grand entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $(X - a)^m$ divise P .

Ainsi :

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X], P = (X - a)^m Q$$

et Q n'est pas divisible par $X - a$.

On dit que la racine est **simple** lorsque son ordre de multiplicité est 1.

On dit que la racine est **double** lorsque son ordre de multiplicité est 2.

1. on effectue la division euclidienne de P par $X - a$;
2. deux cas seulement peuvent se produire :
 - si le reste n'est pas nul alors on s'arrête ;
 - si le reste est nul, on recommence l'étape 1 en effectuant la division euclidienne du quotient obtenu par $X - a$
3. l'ordre de multiplicité de la racine a est le nombre de division euclidienne ayant conduit à un reste nul.

1. Vérifier que 1 est racine de P dans $\mathbb{R}$.
2. Quel est son ordre de multiplicité?

[illegible]
$$(X - a)^k \mid P \Leftrightarrow P(a) = P'(a) = \dots = P^{(k-1)}(a) = 0$$
$$P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(m)}(a) \neq 0$$

1. Démontrer que 1 est une racine de multiplicité 2.
2. Déterminer un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - 1)^2 Q$.
3. En déduire toutes les racines de P .

[illegible]

Théorème 4.12. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul qui admet p racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ dans $\mathbb{K}$ admettant comme ordres de multiplicités respectifs $m_1, \dots, m_p$. Alors il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P = Q \times (X - \alpha_1)^{m_1} \times \dots \times (X - \alpha_p)^{m_p}$$

On a alors en particulier :

$$\deg(Q) + \sum_{i=1}^p m_i = \deg(P)$$

Proposition 4.13. • Le degré d'un polynôme majore le nombre de ses racines comptées avec leur ordre de multiplicité.

- Un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ qui possède au moins $n + 1$ racines dans $\mathbb{K}$ est le polynôme nul.

5 Décomposition en éléments irréductibles

5.1 Polynômes irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 5.1. Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit **irréductible** dans $\mathbb{K}[X]$ lorsque :

- $\deg(P) \geq 1$ et
- P n'admet comme diviseurs que les polynômes constants non nuls et les polynômes λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Remarque 5.2. • $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si P n'admet pas de diviseur de degré strictement compris entre 0 et $\deg(P)$.

- Tout polynôme de degré 1 de $\mathbb{K}[X]$ est irréductible.

Exemple 5.3. 1. $P = X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$: si P n'était pas irréductible, il posséderait un diviseur de degré 1. Or, dans $\mathbb{R}[X]$, tout polynôme de degré 1 possède une racine. ce qui est absurde car P ne possède pas de racine réelle.

2. En revanche, $P = X^2 + 1$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}[X]$ car $X + i$ divise P .

5.2 Polynômes scindés

Définition 5.4. Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit **scindé** dans $\mathbb{K}$ s'il est égal à un produit de polynômes de degré 1 de $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 5.5. $P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé dans $\mathbb{K}$ si et seulement si il s'écrit sous la forme :

$$P = \lambda(X - \alpha_1)^{m_1} \times \dots \times (X - \alpha_p)^{m_p}$$

Proposition 5.6. $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n est scindé dans $\mathbb{K}$ si, et seulement s'il possède exactement n racines comptées chacune avec son ordre de multiplicité.

Application 5.7. Démontrer que $P = 1 + X + X^2$ est scindé dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.

