

Programme de khôlle 11

Semaine du 14 décembre 2020

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire (5-10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{lll} 1. z_1 = 4(-2 + 3i) + 3(-5 - 8i) & 2. z_2 = (2 - i)(3 + 8i) & 3. z_3 = \frac{-4}{1 + i\sqrt{3}} \\ 4. z_4 = \frac{(3 + 5i)^2}{1 - 2i} & 5. z_5 = (1 + i)^3 & \end{array}$$

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{lll} 1. z_1 = 1 + i\sqrt{3} & 2. z_2 = 9i & 3. z_3 = -3 \\ 4. z_4 = \frac{-i\sqrt{2}}{1 + i} & 5. z_5 = \frac{(1 + i\sqrt{3})^3}{(1 - i)^5} & 6. z_6 = \sin x + i \cos x. \end{array}$$

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. On cherche à résoudre l'équation

$$z^3 + (1 + i)z^2 + (i - 1)z - i = 0.$$

1. Rechercher une solution imaginaire pure ai à l'équation.
2. Déterminer $b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$z^3 + (1 + i)z^2 + (i - 1)z - i = (z - ai)(z^2 + bz + c).$$

3. En déduire toutes les solutions de l'équation.
4. Sur le même modèle, résoudre l'équation

$$z^3 - (2 + i)z^2 + 2(1 + i)z - 2i = 0.$$

Exercice 2.2. 1. On considère les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = 1 + i \text{ et } z_3 = \frac{z_1}{z_2}.$$

- (a) Écrire z_3 sous forme algébrique.
 - (b) Écrire z_3 sous forme trigonométrique.
 - (c) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
2. Calculer les racines carrées complexes de $8 - 6i$.

Exercice 2.3. 1. (a) Linéariser $\sin(2x)\cos^2(x)$.

(b) Donner la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$y' - \sin(2x)\cos^2(x)y = 0$$

$$\text{vérifiant } y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

2. Calculer les racines carrées complexes de $-3 - 4i$.

3 Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

Chap.16 : L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

1. Les nombres complexes

- 1.1 Définition et interprétation géométrique
- 1.2 Opérations usuelles
- 1.3 Conjugaison et applications

2. Module et argument d'un nombre complexe

- 2.1 Module d'un nombre complexe
- 2.2 Complexes de module 1
- Notation $e^{i\theta}$ et opérations associées.
- 2.3 Formules d'Euler et de Moivre
- 2.4 Argument d'un nombre complexe
- 2.5 Exponentielle complexe

3. Fonctions de $I \rightarrow \mathbb{C}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$

- 3.1 Définition et généralités
- 1.2 Dérivation

Chap.17 : Équations dans $\mathbb{C}$

1. Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

On cherche à résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et avec

$(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

1.1 Racines carrées complexes

Deux modes d'obtention : en utilisant la forme trigonométrique ou la forme algébrique.

1.2 Solutions de $az^2 + bz + c = 0$