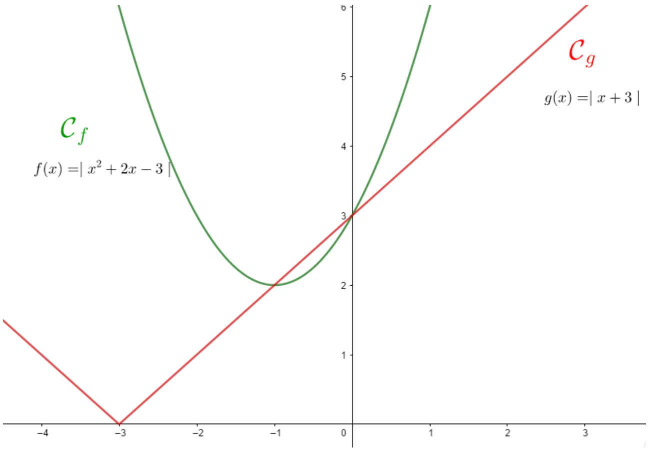
DM 2 - CORRECTION

Exercice 0.1. *Résoudre les équations et inéquations suivantes :*

1. $\mid x^2+2x+3 \mid = \mid x+3 \mid$
   $\Leftrightarrow x^2+2x+3 = x+3 \text{ ou } x^2+2x+3 = -(x+3)$
   $\Leftrightarrow x^2+x = 0 \text{ ou } x^2+3x+6 = 0$
   $\Leftrightarrow x(x+1) = 0 \text{ ou } x^2+3x+6 = 0$
   $\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x^2+3x+6 = 0$
   $\Delta = 3^2 - 4\times 1\times 6 = -15 < 0$ *donc* $x^2+3x+6=0$ *n'a pas de solution.*
   Il vient : $\mathscr{S} = \{-1; 0\}$.



2. $\mid 2x+4 \mid + \mid x-1 \mid = 5$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$\mid 2x+4 \mid$		-2x-4	0	2x+4		2x+4	
$\mid x-1 \mid$		-x+1		-x+1	0	x-1	
$\mid 2x+4 \mid + \mid x-1 \mid$		-3x-3		x+5		3x+3	

- *Sur* $]-\infty; -2]$ *:*

$$\mid 2x+4 \mid + \mid x-1 \mid = 5 \Leftrightarrow -3x-3 = 5 \Leftrightarrow x = \frac{-8}{3} \in]-\infty; -2]$$

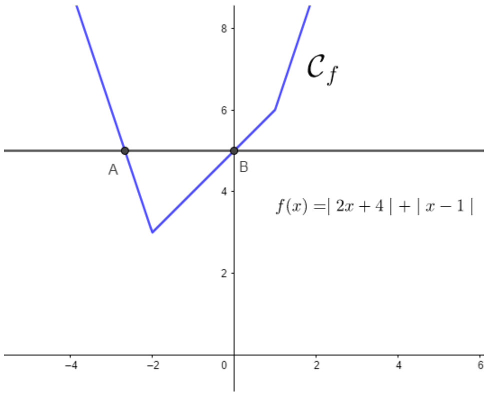
- *Sur* $]-2; 1]$ *:*

$$| 2x+4 | + | x-1 | = 5 \Leftrightarrow x+5 = 5 \Leftrightarrow x = 0 \in]-2;1]$$

- *Sur* $]1;+\infty[$ *:*

$$| 2x+4 | + | x-1 | = 5 \Leftrightarrow 3x+3 = 5 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \notin]1;+\infty[$$

Il vient : $\mathscr{S} = \left\{\frac{-8}{3};0\right\}$.



Exercice 0.2. *Étudier les limites suivantes :*

1. $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ *en 1*
   $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x}\left(1 - \frac{2}{1+x}\right) = \frac{x-1}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1}{1+x}$ *donc :*
   $$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{1+x} = \frac{-1}{2}$$
2. $\frac{x+\cos x}{x+\sin x}$ *en* $+\infty$
   $\frac{x+\cos x}{x+\sin x} = \frac{x\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)} = \frac{1+\frac{\cos x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}$
   Or $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ *donc, d'après le théorème d'encadrement :*
   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$
   De la même manière : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$*. Donc :*
   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos x}{x+\sin x} = 1.$$
3. $\frac{\sqrt{2x^2+5x+9}-3}{x}$ *en* 0
   Il s'agit d'une forme indéterminée. On utilise la quantité conjuguée : $\frac{\sqrt{2x^2+5x+9}-3}{x} = \frac{2x^2+5x+9-9}{x\left(\sqrt{2x^2+5x+9}+3\right)} = \frac{2x+5}{\sqrt{2x^2+5x+9}+3}$.
   Donc : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x^2+5x+9}-3}{x} = \frac{5}{6}$
   Autre solution : *on pouvait également faire apparaitre le taux d'accroissement en* 0 *de la fonction* $f(x) = \sqrt{2x^2+5x+9}$.

4. $\frac{\cos^2 x-1}{x}$ *en 0*
$\frac{\cos^2 x-1}{x} = \frac{\cos x-1}{x} \times (\cos x + 1)$
Or nous savons que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - cos(0)}{x-0} = sin'(0) = 0$ *donc :*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x-1}{x} = 0 \times 2 = 0$$

Exercice 0.3. *Démontrer par récurrence que pour tout entier* $n \geq 1$*, on a :*

$$S_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1\breve{}\,\frac{1}{n+1}$$

Initialisation : *si* $n = 1$ *alors :* $S_1 = \dfrac{1}{1\times(1+1)} = \dfrac{1}{2}$
Or $1 - \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$ *donc* $\mathscr{P}_n$ *est vraie.*
Hérédité : *Supposons* $\mathscr{P}_n$ *vraie à un certains rang* $n \geq 1$ *et montrons que* $\mathscr{P}_{n+1}$ *l'est aussi.*
$S_{n+1} = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \dfrac{1}{3\times 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$
$= 1 - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$
$= 1 - \dfrac{n+2}{(n+1)(n+2)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$
$= 1 - \dfrac{n+2}{(n+1)(n+2)} - \dfrac{-1}{(n+1)(n+2)}$
$= 1 - \dfrac{n+2-1}{(n+1)(n+2)}$
$= 1 - \dfrac{n+1}{(n+1)(n+2)}$
$= 1 - \dfrac{1}{n+2}$
$\mathscr{P}_{n+1}$ *est donc vraie et l'hérédité est établie.*
Conclusion : $\mathscr{P}_1$ *est vraie et* $\mathscr{P}_n$ *est héréditaire donc, par principe de récurrence,* $\mathscr{P}_n$ *est vraie pour tout entier* $n \geq 1$.