Pour le 21 novembre 2021
Devoir-Maison 7

On note I et A les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\mathscr{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathscr{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} ; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

PARTIE I : Étude de la matrice A

1. Calculer A^2.
2. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre.
3. (a) Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

   (b) Déterminer une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 et une matrice D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant telles que : $A = PDP^{-1}$.
4. Montrer : $A^3 = 2A$.

PARTIE II : Étude d'une application définie sur $\mathscr{E}$

1. Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que la famille (I, A, A^2) est une base de $\mathscr{E}$. En déduire la dimension de $\mathscr{E}$.
2. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathscr{E}$, la matrice AM appartient à $\mathscr{E}$. On note f l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui, à toute matrice M de $\mathscr{E}$, associe AM.
3. Vérifier que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{E}$.
4. Former la matrice F de f dans la base (I, A, A^2) de $\mathscr{E}$.
5. (a) Montrer : $f \circ f \circ f = 2f$.

   (b) En déduire que toute valeur propre λ de f vérifie : $\lambda^3 = 2\lambda$.
   Attention : il est interdit dans cette question de calculer un polynôme caractéristique.

   (c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
   Attention : il est interdit dans cette question de calculer un polynôme caractéristique.

6. L'endomorphisme f est-il bijectif ? diagonalisable ?
7. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\ker(f)$.
8. (a) Résoudre l'équation $f(M) = I + A^2$, d'inconnue $M \in \mathscr{E}$.
   (b) Résoudre l'équation $f(N) = A + A^2$, d'inconnue $N \in \mathscr{E}$.