Programme de khôlle 25

Semaine du 3 mai 2021

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire (5-10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels ?

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + 3z = 0\}$;
2. $E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x = y = 2z\}$;
3. $E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = x^2\}$;
4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x+3y-5z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x-y+z = 0\}$;
5. $E_5 = \{P \in \mathbb{R}[X];\ P(0) = P(2)\}$;
6. $E_6 = \{P \in \mathbb{R}[X];\ P'(0) = 2\}$;
7. $\mathscr{D}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont dérivables ;
8. E_7, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$, où $a \in \mathscr{D}$.

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. *1. On note E l'ensemble des fonctions $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telles qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (ax^2 + bx + c)cos(x)$$

(a) Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(b) Déterminer une base de E ainsi que sa dimension.

2. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et F le sous-ensemble de E contenant les suites arithmétiques. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et donner sa dimension.

Exercice 2.2. *Dans* $\mathbb{R}_3[X]$, *on note :* $P_1 = 1 + X + X^2 + X^3, P_2 = -1 + X - X^2 + X^3, P_3 = 1 - X$ *et* $P_4 = X^2 + X^3$.

1. *Soit* $F_1 = \{P \in \mathbb{R}_3[X], \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2, P = (a+b)X^3 + (a-b)X^2 + (a+b)X + a - b\}$.
   (a) *Démontrer que* F_1 *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_3[X]$.
   (b) *Démontrer que* $F_1 = vect(P_1, P_2)$.
   (c) F_1 *est-il de dimension finie ? Si oui, laquelle ?*
2. *Soit* $\mathscr{F} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$.
   (a) *Former la matrice de la famille* $\mathscr{F}$ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}_3[X]$.
   (b) *En déduire que la famille* $\mathscr{F}$ *est une base de* $\mathbb{R}_3[X]$.
3. *On désigne par* $F_2 = vect(P_3, P_4)$.
   Démontrer que $\mathbb{R}_3[X] = F_1 \oplus F_2$.

Exercice 2.3. *Soit* $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = P(-1) = 0\}$.

1. *Démontrer que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_3[X]$.
2. *Démontrer que* $\mathbb{R}_3[X] = F \oplus R_1[X]$

3 Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

Chap.38 : Espaces vectoriels

1 Espaces et sous espaces vectoriels
1.1 Définition
1.2 Exemples de référence
1.3 Produit cartésien d'espaces vectoriels

2 Sous-espaces vectoriels
2.1 Combinaisons linéaires et sous-espaces vectoriels
2.2 Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs
2.3 Somme de sous-espaces vectoriels

3 Familles finies de vecteurs
3.1 Familles libres ou liées
3.2 Familles génératrices, bases
3.3 Base adaptée à une somme directe

Chap.39 : Espaces vectoriels de dimension finie