Chap.6 : Raisonnements par récurrence

On suppose que l'ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N}$, a été construit, que les entiers naturels peuvent être ordonnés, et que cet ordre possède les propriétés suivantes :

1. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément
2. Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément
3. $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément

1 Illustrations du principe de récurrence

1.1 Sur des situations courantes

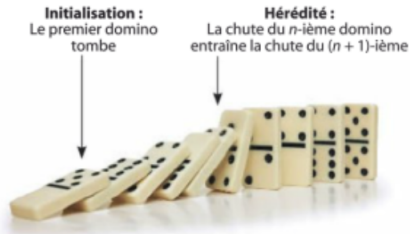


FIGURE 1 – Quelles sont les deux conditions pour que tous les dominos se renversent ?

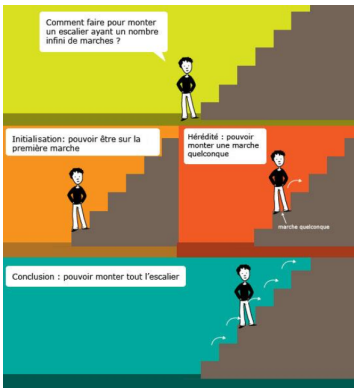


FIGURE 2 – Si on peut accéder à une marche n_0 de l'escalier ***(initialisation)*** et si l'on sait passer d'une marche à la marche suivante (***hérédité***), alors on peut accéder à toute marche au-dessus de n_0

1.2 Sur un exemple mathématiques

On souhaite démontrer la propriété $\mathscr{P}$ suivante :

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Remarque 1.1. *1. Pour tout entier naturel n,* $\sum_{k=0}^{n} k$ *et* $\frac{n(n+1)}{2}$ *sont deux nombres. La propriété à démontrer est l'égalité de ces deux nombres quel que soit l'entier naturel n.*

2. La propriété $\mathscr{P}$ *est elle même constituée d'une infinité de sous propriétés : l'égalité pour* $n = 0$*, celle pour* $n = 1$*, pour* $n = 2$*,etc...*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$*, on note* $\mathscr{P}_n$ *la propriété au rang n :*

$$\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Pour prouver que $\mathscr{P}$ *est vraie, il faut prouver que* $\mathscr{P}_0$*,* $\mathscr{P}_1$*,etc...sont vraies.*

3. Si on pend par exemple $n = 4$ *:*

- $\sum_{k=0}^{4} k = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$
- $\frac{4(4+1)}{2} = \frac{20}{2} = 10$

$\mathscr{P}_4$ *est donc vraie car* $10 = 10$

2 La récurrence simple

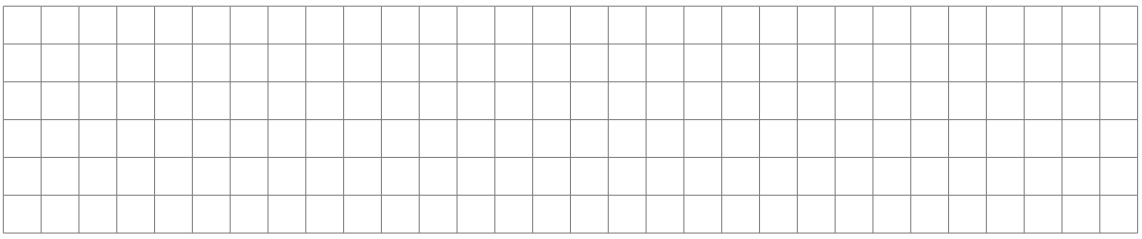
2.1 Le principe de récurrence

Méthode 2.1. *Soit* $n_0 \in \mathbb{N}$*. Il s'agit de démontrer que, pour tous* $n \geq n_0$*, la propriété* $\mathscr{P}_n$ *est vraie.*
Pour cela, on procède en trois étapes :

- ***Initialisation :*** *on démontre que la propriété* $\mathscr{P}_{n_0}$ *est vraie*
- ***Hérédité :*** *on montre que la propriété se transmet de proche en proche. Si, pour un certain entier n,* $\mathscr{P}_n$ *est vraie, alors* $\mathscr{P}_{n+1}$ *l'est également.*
  On suppose que la propriété $\mathscr{P}_n$ *(hypothèse de récurrence), et on en déduit que la propriété* $\mathscr{P}_{n+1}$ *est vraie. La propriété est alors dite* ***héréditaire****.*
- ***Conclusion :*** *on en déduit, par récurrence, que la propriété* $\mathscr{P}_n$ *est vraie pour tout entier* $n \geq n_0$*.*

Application 2.2. *Montrons que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

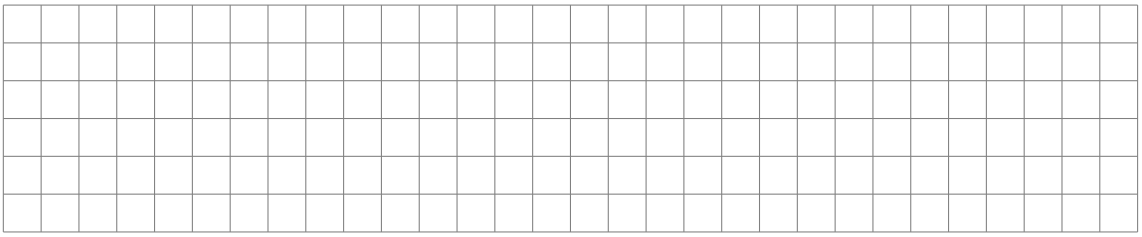


Remarque 2.3. *On peut utiliser un raisonnement par récurrence pour montrer des assertions de natures différentes telles :*

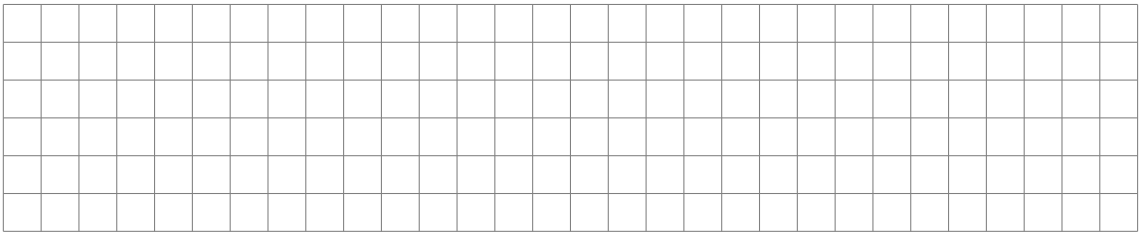
- *une formule :* $\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2... + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- *une inégalité :* $\forall n \in \mathbb{N}$, *si* $n \geq 10$ *alors* $100n \leq 2^n$
- *une affirmation :* $\forall n \in \mathbb{N}^*, 4^n - 1$ *est divisible par 3*

2.2 Applications

Application 2.4. *Démontrer qu'à partir d'un certain rang n_0 à déterminer :* $\forall n \geq n_0, 100n \leq 2^n$



Application 2.5. *Démontrer que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*, 4^n - 1$ *est divisible par 3*



Application 2.6. *Démontrer que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

3 Théorème de récurrence "double"

Théorème 3.1. *Soit $\mathscr{P}_n$ une assertion dépendant d'un entier naturel n. On suppose que :*

- *$\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont vraies ;*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ sont vraies alors $\mathscr{P}_{n+2}$ l'est aussi*

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

Application 3.2. *Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que* $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \end{cases}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = n$

Application 3.3. *Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que* $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + 2^n$

Application 3.4. ***La célèbre suite de Fibonacci*** *.*
On pose $f_1 = f_2 = 1$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, f_n \geq 0$.

4 Théorème de récurrence "forte"

Théorème 4.1. *Soit* $\mathscr{P}_n$ *une assertion dépendant d'un entier naturel* n.
On suppose que :

- $\mathscr{P}_0$ *est vraie ;*
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *si* $\mathscr{P}_0, \mathscr{P}_1, ..., \mathscr{P}_n$ *sont vraies alors* $\mathscr{P}_{n+1}$ *l'est aussi*

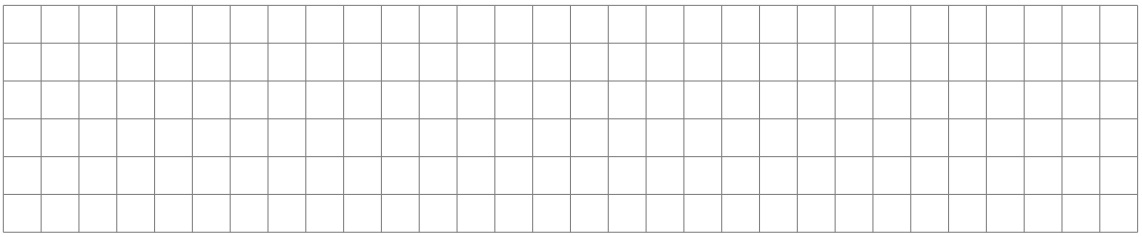
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ *est vraie.*

Application 4.2. *Soit la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_0 + u_1 + ... + u_n \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2^n$

Application 4.3. *on pose* $u_1 = 3$ *et pour tout* $n \geq 1$ *:*

$$u_{n+1} = \frac{2}{n}(u_1 + u_2 + ... + u_n)$$

1. *Calculer* u_2, u_3 *et* u_4.
2. *Montrer que pour tout* $n \geq 1, u_n = 3n$.