Chap.32 : Continuité

Dans tout ce qui suivra :

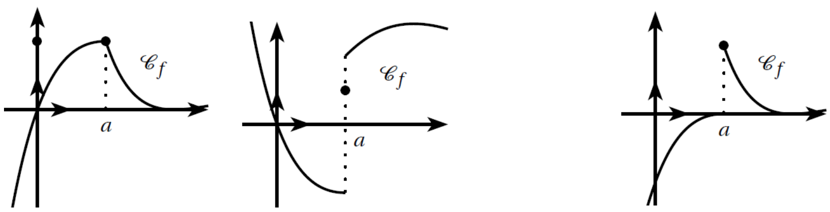
- I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point ;
- $a \in I$
- f désignera une fonction $f : I \to \mathbb{R}$

1 Continuité en un point

Définition 1.1. *On dit que f est* ***continue*** *en a lorsque f admet pour limite $f(a)$ en a :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$$

On dit que f est ***discontinue*** *en a lorsqu'elle n'est pas continue en a.*



Application 1.2. *Démontrer que la partie entière n'est pas continue en* 0.

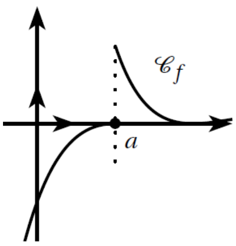
Proposition 1.3.

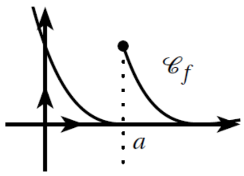
- *Les fonctions polynomiales, rationnelles, trigonométriques directes et réciproques, logarithmique, exponentielle, puissance et valeur absolue sont continues en tout a où elles sont définies.*
- *La fonction partie entière est continue en a si et seulement si $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.*

Théorème 1.4. ***Caractérisation séquentielle de la continuité.***
f est continue en a si, et seulement si, pour toute suite (u_n) d'éléments de I qui converge vers a, on a :

$$\lim f(u_n) = f(a).$$

Définition 1.5.
- *On dit que f est* ***continue à gauche*** *en a lorsque* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.
- *On dit que f est* ***continue à droite*** *en a lorsque* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.





Application 1.6. *Étudier la continuité à gauche et à droite en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par* $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

Théorème 1.7. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ qui n'est pas une borne de I. Alors :*

$$f \text{ est continue en } a \Leftrightarrow f \text{ est continue à gauche et à droite en } a$$

Application 1.8. *Étudier la continuité en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par* $f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sqrt{x^2}}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

Définition 1.9. *Soit f définie sur I et a une borne de I n'appartenant pas à I.*

- *On dit que f est* ***prolongeable par continuité*** *en a lorsque f admet une limite finie en a. Elle est notée $\ell \in \mathbb{R}$.*
- *Si f est prolongeable par continuité en a alors la fonction g définie sur $I \cup \{a\}$ par*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in I \\ \ell \text{ si } x = a \end{cases}$$

est appelée ***prolongement par continuité*** *de f en a.*

Application 1.10. *Définir, si possible, le prolongement par continuité en* 0 *des fonctions suivantes :*

1. $f_1(x) = \frac{sin(2x^2)}{x}$
2. $f_2(x) = \frac{ln(1+3x)}{sin(x)}$

Application 1.11. *La fonction* $f : \left\{ \begin{array}{l}]0;\pi[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1-cos(x)}{xsin(x)} \end{array} \right.$ *est-elle prolongeable par continuité en* 0 *? en* π *?*

Proposition 1.12. *Soient f et g deux fonctions définies sur I à valeurs réelles., toutes deux continues en $a \in I$. Alors :*

1. *$f + g$ est continue en a ;*
2. *pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda f$ est continue en a ;*
3. *fg est continue en a ;*
4. *si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\frac{1}{g}$ est continue en a.*
5. *si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en a.*

Proposition 1.13. *Soient :*

- *un intervalle I et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$*
- *un intervalle J tel que $f(I) \subset J$; et une fonction $g : J \to \mathbb{R}$.*

Si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

Application 1.14. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto sin(x) + e^{cos(x)} \end{array} \right.$ *. Démontrer que f est continue en tout $a \in \mathbb{R}$.*

2 Continuité sur un intervalle

Définition 2.1. *Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en tout $a \in I$.*
On note $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

Remarque 2.2. *D'après la définition précédente et d'après la Proposition 1.3, toutes les fonctions de références sont continues sur tout intervalle I inclus dans leur domaine de définition.*

Proposition 2.3. *Soient $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ alors :*

1. $f + g \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$;
2. *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$;
3. $fg \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$;
4. *si* $g(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in I$, *alors* $\frac{1}{g} \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$;
5. *si* $g(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in I$, *alors* $\frac{f}{g} \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$.

Proposition 2.4. *Soient :*

- *un intervalle I et une fonction $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$*
- *un intervalle J tel que $f(I) \subset J$ et une fonction $g \in \mathscr{C}(J, \mathbb{R})$.*

Alors $g \circ f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$.

Remarque 2.5. *Les deux propositions précédentes sont importantes car elles permettent de démontrer la continuité d'une fonction sur un intervalle en l'exprimant à l'aide de fonctions de références.*

Application 2.6. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ln(x-1)}{x-2} \text{ si } x > 2 \\ 1 \text{ si } x = 2 \\ 3 - x \text{ si } x < 2 \end{cases}$$

Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Méthode 2.7. *Soit $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ et une suite (u_n) définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ qui converge vers $\ell \in I$. Alors, d'après la caractérisation séquentielle de la continuité (CF. Théorème 1.4) :*

$$\ell = f(\ell)$$

*On dit que ℓ est un **point fixe** de f.*

Application 2.8. *Soient la fonction $f : \begin{cases}]-\infty; 6[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{8}{6-x} \end{cases}$ et la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.*
On admet que la suite est bien définie.

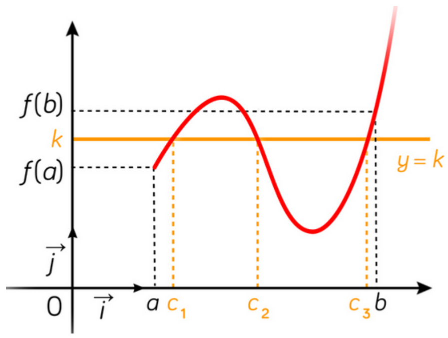
1. *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$.*
2. (a) *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-2)(u_n-4)}{6-u_n}$.*
   (b) *En déduire le sens de variation de (u_n).*
3. *Démontrer que cette suite est convergente et déterminer sa limite.*

3 Théorèmes fondamentaux liés à la continuité

3.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3.1. *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et soit $f \in \mathscr{C}([a; b], \mathbb{R})$. On suppose que $f(a) \leq f(b)$.*
Alors f atteint toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$:

$$\forall k \in [f(a); f(b)], \exists c \in [a; b], f(c) = k.$$



Théorème 3.2. *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et soit $f \in \mathscr{C}([a; b], \mathbb{R})$. On suppose que $f(a) \leq f(b)$.*
*Si f est strictement monotone sur $[a; b]$ alors, pour toute valeur k comprise entre $f(a)$ et f(b), il existe **un unique** $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$:*

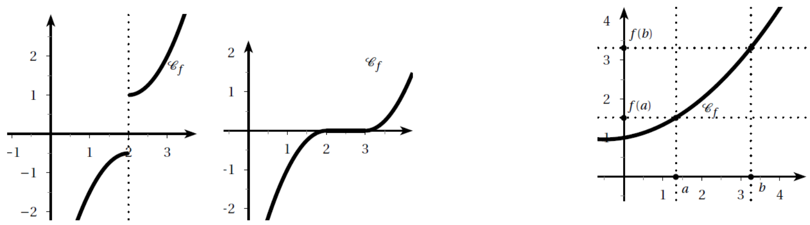
$$\forall k \in [f(a); f(b)], \exists ! c \in [a; b], f(c) = k.$$

Le théorème précédent est souvent utilisé lorsque $k = 0$. Il permet de justifier l'existence et l'unité d'une solution d'une équation de la forme $f(x) = 0$. Une telle solution est appelée un **zéro** de f.

Proposition 3.3. *Soient $f \in \mathscr{C}([a; b], \mathbb{R})$ strictement monotone telle que $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$ sont de signes opposés. Alors :*

$$\exists ! c \in]a; b[\text{ tel que } f(c) = 0$$

Remarque 3.4. *Chacune des hypothèses (continuité, monotonie stricte et signes différents) est nécessaire et le manquement de l'une empêche l'utilisation de la propriété.*



Application 3.5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$f_n(x) = x^n + x - 1$$

1. *Démontrer que f_n admet un unique zéro, noté u_n, tel que $u_n \in [0; 1]$.*
2. *Calculer u_1 et u_2.*

Proposition 3.6. ***Principe de dichotomie.*** *Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *et soit* $f \in \mathscr{C}([a; b], \mathbb{R})$ *admettant un unique zéro* $\ell \in [a; b]$.
La dichotomie consiste à déterminer deux suites (a_n) *et* (b_n) *qui convergent vers* ℓ*. Ces dernières sont définies par récurrence :*

- *au rang 0 : on pose* $a_0 = a$ *et* $b_0 = b$ *;*
- *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on calcule* $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ *;*
- *si* $f(a_n) \times f(c_n) \leq 0$ *alors* $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = c_n \end{cases}$ *et sinon* $\begin{cases} a_{n+1} = c_n \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$.

Alors :

- $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \ell \leq b_n$ *;*
- $(b_n - a_n)$ *est une suite géométrique de raison* $\frac{1}{2}$ *;*
- *les suites* (a_n) *et* (b_n) *sont adjacentes et convergent vers* ℓ*.*

Remarque 3.7. *Cette propriété a déjà été mise en œuvre en informatique. Un script rédigé en Python permet d'approximer* ℓ *avec une précision* $\varepsilon > 0$ *quelconque déterminée par l'utilisateur.*

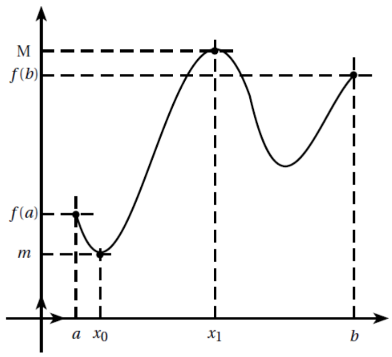
```python
def dichotomie(a,b,precision):
    while abs(b-a)>precision:
        c=(a+b)/2
        if f(a)*f(c)>0: a=c
        else:b=c
    return(c)
```

3.2 Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème 3.8. *Si* $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ *alors* $f(I)$ *est un intervalle, autrement dit, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Théorème 3.9. *Soit* $f \in \mathscr{C}([a; b], \mathbb{R})$ *alors* f *est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit, il existe* $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $f([a; b]) = [m; M]$ *avec :*

- $m = \inf(\{f(x), x \in [a; b]\})$
- $M = \sup(\{f(x), x \in [a; b]\})$



Remarque 3.10. *Le Théorème 3.9 nous apprend que l'image d'un segment par une fonction continue est un segment. C'est donc un intervalle de même nature (fermé et borné).*
Cette situation est spécifique aux segments (le résultat est faux dans le cadre plus général du Théorème 3.8. Par exemple, l'image de l'intervalle ouvert non borné $]0;+\infty[$ par la fonction continue sinus est le segment $[-1;1]$ qui est un intervalle fermé borné.

Théorème 3.11. ***Théorème de la bijection*** *Soit $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ strictement monotone sur I. Alors :*

- *$J = f(I)$ est un intervalle ;*
- *f est une bijection de I dans J ;*
- *la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue sur J et a le même sens de variation que f.*

Application 3.12. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{1+|x|} \end{cases}$

1. *Étudier la parité de f ainsi que ses limites en $+\infty$ et $-\infty$*
2. (a) *Démontrer que f admet une bijection réciproque définie et continue sur un intervalle J à préciser.*
   (b) *Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.*