Exercices
Chap.19 : Géométrie dans l'espace

Dans tout ce qui suit, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les différentes coordonnées seront données dans ce dernier.

1 Produit scalaire, vectoriel et mixte

Exercice 1.1.

1. *Déterminer $m \in \mathbb{R}$ tel que les vecteurs $\vec{u}(1;2;1)$, $\vec{v}(2;1;2)$ et $\vec{w}(-1;1;m)$ sont coplanaires.*
2. *Lorsque les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, exprimer $\vec{w}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

Exercice 1.2. *Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} m \\ m \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2-m \\ 1 \\ m-2 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}}$. Pour quelles valeurs de m les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils :*

1. *colinéaires ?*
2. *orthogonaux ?*

Exercice 1.3. *On considère les trois vecteurs $\vec{u}(1;3;-1)$, $\vec{v}(2;0;1)$ et $\vec{w}(-2;-2;1)$.*

1. *Calculer :*
   - (a) $\vec{u}.\vec{v}$
   - (b) $\vec{u} \wedge \vec{v}$
   - (c) $\vec{v} \wedge \vec{w}$
   - (d) $\vec{u} \wedge \vec{w}$
   - (e) $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}$
   - (f) $(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge (\vec{u} \wedge \vec{w})$
   - (g) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$
2. *Que vaut $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$? Qu'en conclure ?*

2 Bases et repères de l'espace

Exercice 2.1. *On considère les trois vecteurs $\vec{u}(1;-2;3)$, $\vec{v}(1;1;1)$ et $\vec{w}(1;0;0)$.*

1. *Montrer que $\mathscr{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de vecteurs de l'espace.*
2. *Soit $\vec{t}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{t}$ dans la base $\mathscr{B}$.*

Exercice 2.2. *Soient les vecteurs* $\overrightarrow{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k})$, $\overrightarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ *et* $\overrightarrow{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$.
Démontrer que $\mathscr{F} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *est une base orthonormée. Cette base est-elle directe ?*

3 Calcul de grandeurs

Exercice 3.1. *Soient* $\overrightarrow{u}(1;1;1)$, $\overrightarrow{v}(1;-2;0)$ *et* $\overrightarrow{w} = \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{u} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{v}$.

1. *Déterminer* $cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *et* $\mid sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \mid$.
2. *Justifier que* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *sont coplanaires puis calculer* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$.

Exercice 3.2. *Soient* $A(1;3;0), B(3;1;0), C(4;4;0)$ *et* $S(4;4;2)$.

1. (a) *Déterminer les coordonnées du point* D *tel que* $ABCD$ *soit un parallélogramme.*
   (b) *Déterminer les longueurs* BA *et* BC *ainsi que la valeur approché arrondie à l'unité de la mesure de l'angle non orienté* $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$
2. (a) *Déterminer les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$.
   (b) *Montrer que la droite* (SC) *est une hauteur de la pyramide* $SABCD$.
   (c) *Calculer la norme du vecteur* $\overrightarrow{n}$. *En déduire l'aire du parallélogramme* $ABCD$.
   (d) *Déduire des questions précédentes le volume* $\mathscr{V}$ *de la pyramide* $SABCD$.

Exercice 3.3. *Soient les points* $A(3;1;0)$ *et* $B(2;3;0)$.

1. (a) *Calculer* $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$.
   (b) *En déduire la mesure de l'angle non orienté* $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
2. (a) *Calculer les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$.
   (b) *En déduire l'aire du triangle* OAB.
3. *Soit le point* C *tel que* $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$. *Calculer le volume* $\mathscr{V}$ *de la pyramide* $COAB$.