Pour le 21 novembre 2021
Devoir-Maison 7 - CORRECTION

On note I et A les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\mathscr{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathscr{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} ; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

PARTIE I : Étude de la matrice A

1. Calculer A^2.
   $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre.
   On cherche tous les réels a, b, c tels que $aI + bA + cA^2 = 0$. On a :
   $aI + bA + cA^2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} = 0$
   $\Longleftrightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ a+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0$
   La famille (I, A, A^2) est donc libre.
3. (a) Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
   Déterminons les valeurs propres de A en déterminant les racines

du polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\lambda \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\
&= \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -2 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} \quad \text{dvl par rapport à } L_1 \\
&= \lambda \left(\lambda^2 - 2\right) = \lambda(\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2})
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc $0, \sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.
Comme $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que A admet 3 valeurs propres distinctes, A est diagonalisable.

(b) Déterminer une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 et une matrice D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant telles que : $A = PDP^{-1}$.

Vecteurs propres : $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 0

$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\sqrt{2}$

$X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $-\sqrt{2}$.

La famille (X_1, X_2, X_3) est une famille de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes donc c'est une base de vecteurs propres de A.
On a donc $A = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Montrer : $A^3 = 2A$.
   On peut facilement remarquer que $D^3 = 2D$.
   Or $A^3 = \left(PDP^{-1}\right)^3 = PD^3P^{-1}$.
   Donc on a bien $A^3 = 2A$.

PARTIE II : Étude d'une application définie sur $\mathscr{E}$

1. Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que la famille $\left(I, A, A^2\right)$ est une base de $\mathscr{E}$. En déduire la dimension de $\mathscr{E}$.
   On a facilement $\mathscr{E} = \text{Vect}\left(I, A, A^2\right)$.
   Donc $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ (car c'est un sous-espace engendré) et de plus la famille $\left(I, A, A^2\right)$ est une famille génératrice de $\mathscr{E}$.
   De plus, on a déjà montré que la famille $\left(I, A, A^2\right)$ est une famille libre.
   Donc $\left(I, A, A^2\right)$ est une base de $\mathscr{E}$ et $\dim(\mathscr{E}) = 3$.
2. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathscr{E}$, la matrice AM appartient à $\mathscr{E}$.
   Soit $M = aI + bA + cA^2 \in \mathscr{E}$. On a alors :
   $$AM = aA + bA^2 + cA^3 = aA + bA^2 + 2cA = (a + 2c)A + bA^2$$
   Donc $AM \in \mathscr{E}$.

   On note f l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui, à toute matrice M de $\mathscr{E}$, associe AM.
3. Vérifier que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{E}$.
   On vient de montrer que f est une application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$. Montrons maintenant que f est une application linéaire.
   Soient M et N deux matrices de $\mathscr{E}$ et x un réel. On a alors :
   $$f(M + xN) = A(M + xN) = AM + xAN = f(M) + xf(N)$$
   f est donc une application linéaire de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$, c'est-à-dire un endomorphisme de $\mathscr{E}$.
4. Former la matrice F de f dans la base $\left(I, A, A^2\right)$ de $\mathscr{E}$.
   On a $f(I) = A = 0I + 1A + 0A^2, f(A) = A^2 = 0I + 0A + 1A^2$ et $f\left(A^2\right) = A^3 = 0I + 2A + 0A^2$.
   Donc $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
5. (a) Montrer : $f \circ f \circ f = 2f$.
   Pour tout $M \in \mathscr{E}, (f \circ f \circ f)(M) = A(A(AM)) = A^3M = 2AM = 2f(M)$. On a donc bien $f \circ f \circ f = 2f$.
   (b) En déduire que toute valeur propre λ de f vérifie : $\lambda^3 = 2\lambda$.
   Attention : il est interdit dans cette question de calculer un polynôme caractéristique.

Soit λ une valeur propre de f et $M_\lambda \in \mathscr{E}\backslash\{0\}$ un vecteur propre associé.
On a alors $(f \circ f \circ f)(M_\lambda) = \lambda^3 M_\lambda$ et, d'après la question précédente,

$$(f \circ f \circ f)(M_\lambda) = 2f(M_\lambda) = 2\lambda M_\lambda$$

On obtient donc $\left(\lambda^3 - 2\lambda\right) M_\lambda = 0$ et comme $M_\lambda \neq 0$, on a bien $\lambda^3 = 2\lambda$.

(c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
Attention : il est interdit dans cette question de calculer un polynôme caractéristique.
Les seules valeurs propres possibles sont donc 0, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. Pour vérifier si ces réels sont bien des valeurs propres de f, nous allons utiliser F la matrice de f.
On considère $M = aI + bA + cA^2$. On a :

$$f(M) = 0M \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{(I,A,A^2)}(f) \times \mathrm{Mat}_{(I,A,A^2)}(M) = 0 \Longleftrightarrow$$
$$F\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -2c \\ b = 0 \end{array} \right.$$

Donc 0 est une valeur propre de f (car on a obtenu une infinité de solutions) et $E_0(f) = \left\{-2cI + 0A + cA^2 / c \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(A^2 - 2I\right)$
On a :

$$f(M) = \sqrt{2}M \Longleftrightarrow F\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = \sqrt{2}c \end{array} \right.$$

Donc $\sqrt{2}$ est une valeur propre de f et $E_{\sqrt{2}}(f) = \mathrm{Vect}\left(\sqrt{2}A + A^2\right)$.
On a :

$$f(M) = -\sqrt{2}M \Longleftrightarrow F\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -\sqrt{2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = -\sqrt{2}c \end{array} \right.$$

Donc $-\sqrt{2}$ est une valeur propre de f et $E_{-\sqrt{2}}(f) = \mathrm{Vect}\left(-\sqrt{2}A + A^2\right)$.

6. L'endomorphisme f est-il bijectif ? diagonalisable ?
0 est une valeur propre de f donc f n'est pas bijectif. f admet trois valeur propres distinctes et $\mathscr{E}$ est de dimension 3, donc f est diagonalisable.

7. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\ker(f)$.
D'après le calcul fait à la question 6., $f(M) = (a + 2c)A + bA^2$.
Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(A, A^2\right)$.
La famille $\left(A, A^2\right)$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ et libre (deux vecteurs non

proportionnels) donc c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
$\ker(f) = E_0(f) = \mathrm{Vect}\left(A^2 - 2I\right)$.
La famille $\left(A^2 - 2I\right)$ est génératrice de $\ker(f)$ et libre (un seul vecteur non nul) donc c'est une base de $\ker(f)$.

8. (a) Résoudre l'équation $f(M) = I + A^2$, d'inconnue $M \in \mathscr{E}$.
   L'équation $f(M) = I + A^2$ n'admet pas de solutions car $I + A^2 \notin \mathrm{Im}(f)$.

   (b) Résoudre l'équation $f(N) = A + A^2$, d'inconnue $N \in \mathscr{E}$.
   Soit $N = xI + yA + zA^2$. On a

$$f(N) = A+A^2 \iff (x+2z)A+yA^2 = A+A^2 \iff \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

   car la famille $\left(A, A^2\right)$ est libre.
   Les solutions de l'équation $f(N) = A + A^2$ sont les matrices de la forme $(1 - 2z)I + A + zA^2$, où $z \in \mathbb{R}$