Chap.39 : Espaces vectoriels de dimension finie

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un élément de $\mathbb{K}$ est appelé un scalaire.

1 Dimension finie

1.1 Définition

Définition 1.1. *On dit que E est de **dimension finie** lorsque E admet une famille génératrice finie.*
*Si ce n'est pas le cas, on dit que E est de **dimension infinie**.*

Exemple 1.2.

- *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie. Une famille génératrice est $\{\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ avec :*

$$\overrightarrow{e}_1 = (1, 0, ..., 0), \overrightarrow{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., \overrightarrow{e}_n = (0, ..., 0, 1).$$

En effet :

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n, (x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e}_i$$

- *$\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie. Si $\mathbb{K}[X]$ était de dimension finie, il existerait une famille génératrice $\mathscr{F}$. Soit N le degré maximal des éléments de cette famille. Un polynôme de degré $N+1$ ne pourrait pas s'écrire comme combinaisons linéaires de polynômes de $\mathscr{F}$, donc serait de degré inférieur ou égal à N. Il y a contradiction. Donc $\mathbb{K}[X]$ est bien de dimension infinie.*

- *$\mathbb{K}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égal à n est de dimension finie car engendré par la famille $(1, X, X^2, ..., X^n)$.*

1.2 Théorèmes fondamentaux en dimension finie

Théorème 1.3. ***Théorème de la base extraite.***
Soit E, un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. On suppose que E n'est pas réduit au vecteur nul.
De toute famille génératrice de E, on peut extraire une sous-famille qui est une base de E.
*Donc **tout espace vectoriel de dimension finie admet une base finie**.*

Théorème 1.4. ***Théorème de la base incomplète.*** *Soit E, un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. On suppose que E n'est pas réduit au vecteur nul.*
Toute famille libre $\{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p\}$ peut être complétée en une base de E.

Exemple 1.5. *Dans $\mathbb{R}^3$, on peut prouver facilement que la famille*

$$\{\overrightarrow{u}_1 = (2, 0, 1), \overrightarrow{u}_2 = (1, -1, 0)\}$$

est libre. Il est possible de la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$.
Soit $\overrightarrow{u}_3 = (0, 0, 1)$, alors on peut montrer que la famille $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Remarque : on aurait pu compléter $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\}$ grâce à un autre vecteur que $\overrightarrow{u}_3$.

Proposition 1.6. *Soit E, un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. On suppose que E admet :*

1. *Une famille libre $\{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p\}$ de p vecteurs.*
2. *Une famille génératrice $\{\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_m\}$ de m vecteurs.*
3. *Une base$\{\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ de n vecteurs.*

Alors :

$$p \leq n \leq m$$

1.3 Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Proposition 1.7. *Soit E, un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. On suppose que E n'est pas réduit au vecteur nul.*
Alors :

- *toutes les bases de E ont le même cardinal*
- *ce cardinal commun est appelé la* ***dimension*** *de l'espace vectoriel. Elle est notée $\boldsymbol{dim_{\mathbb{K}}(E)}$ ou $\boldsymbol{dim(E)}$.*

Par convention, l'espace vectoriel réduit au vecteur nul $\left\{\overrightarrow{O}\right\}$ est dit de dimension nulle.

Exemple 1.8.
- *$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de base $\mathscr{B} = \{1, i\}$.*
  $\mathbb{C}$ est donc de dimension finie sur $\mathbb{R}$ avec $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$
- *$\mathbb{C}$ est également un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de base $\mathscr{B} = \{1\}$.*
  $\mathbb{C}$ est donc de dimension finie sur $\mathbb{C}$ avec $dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$

On appelle droite vectorielle un espace vectoriel engendré par un vecteur non nul. Une droite vectorielle est donc de dimension 1.
Dans $\mathbb{K}[X]$, le sous-espace vectoriel $Vect(X^2)$ est une droite vectorielle, c'est l'espace vectoriel des polynômes $\{\lambda X^2, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

De même, un plan vectoriel est un espace vectoriel de dimension 2 (car engendré par deux vecteurs non colinéaires qui en constituent une base).

Proposition 1.9.

- *L'espace vectoriel* $\mathbb{K}^n$ *est de dimension* n*. La base usuelle, dite canonique, est* $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ *avec :*

$$\overrightarrow{e}_1 = (1, 0, ..., 0), \overrightarrow{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., \overrightarrow{e}_n = (0, ..., 0, 1).$$

- *L'espace vectoriel* $\mathbb{K}_n[X]$ *a pour dimension* $n + 1$*. Sa base canonique est :*

$$\mathscr{B} = \{1, X, X^2, ..., X^n\}$$

- $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *est un espace vectoriel de dimension* $n \times p$*. Sa base canonique est constituée des matrices* $E_{i,j}$ *telles que :*

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], E_{i,j} = (\delta_{i,k}\delta_{k,\ell})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \ell \leq p}}$$

Autrement dit, $E_{i,j}$ *est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception de celui situé sur la* $i^{ème}$ *ligne et la* $j^{ème}$ *colonne qui vaut 1.*

Proposition 1.10. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie avec* $dim(E) = n \in \mathbb{N}$*. Alors :*

- *toute famille de* m *vecteurs avec* $m > n$ *est liée ;*
- *toute famille de* p *vecteurs avec* $p < n$ *n'est pas génératrice ;*
- *toute famille libre de* n *vecteurs est génératrice et est donc une base ;*
- *toute famille génératrice de* n *vecteurs est libre et est donc une base.*

Remarque 1.11. *On en déduit en particulier que dans un espace vectoriel de dimension* n*, toute famille de* $n + 1$ *vecteur est nécessairement liée.*

Méthode 1.12. *Si l'on sait que l'on travaille en dimension finie* n *et que l'on veut montrer qu'une famille de* n *vecteurs est une base, alors :*

- *soit on s'assure de son caractère libre ;*
- *soit on s'assure de son caractère générateur.*

Méthode 1.13. *On peut utiliser le théorème de la base incomplète pour construire une base d'un espace vectoriel de dimension finie* n *:*

- *si l'on connait une famille génératrice, en supprimant certains vecteurs afin d'obtenir* n *vecteurs de cette famille formant une famille libre ;*
- *si l'on connait une famille libre, en y ajoutant des vecteurs afin d'obtenir* n *vecteurs formant une famille génératrice. En général, on essaye de compléter la famille avec des vecteurs de la base canonique.*

Application 1.14. *Soit le* $\mathbb{R}-$*espace vectoriel* $E = \mathbb{R}_3[X]$.
On considère les polynômes :

$$P_1 = X + X^3, P_2 = X - 2X^2 + 2X^3 \text{ et } P_3 = 1 + X.$$

Soit la famille $\mathscr{F} = \{P_1, P_2, P_3\}$.

1. $\mathscr{F}$ *est-elle libre ?*
2. $\mathscr{F}$ *est-elle une base de* E *?*
3. *Est-il possible de la compléter en une base de* E *?*

Application 1.15. *La famille* $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3\}$ *avec* $\overrightarrow{u}_1 = (1,1,1), \overrightarrow{u}_2 = (-1,1,1)$ *et* $\overrightarrow{u}_3 = (1,-1,1)$ *est-elle une base de* $\mathbb{R}^3$ *? Si oui, exprimer les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{u} = (1,2,3)$ *dans cette base.*

2 Sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie

2.1 Premières propriétés

Proposition 2.1. *Soit un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel* E *de dimension finie et soit* F *un sous-espace vectoriel de* E*. Alors :*

- F *est de dimension finie et* $dim(F) \leq dim(E)$ *;*
- $dim(F) = dim(E) \Leftrightarrow F = E$

Définition 2.2. *Soit un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel* E *de dimension finie* $n \geq 1$.
Tout sous-espace vectoriel de E *de dimension* $n-1$ *est appelé un* ***hyperplan*** *de* E.

Application 2.3. *Soit* $E = \mathbb{R}_3[X]$ *et* $F = \{P \in E, P(1) = 0\}$.

1. *Démontrer que* F *est un sous-espace vectoriel de* E.
2. *Déterminer une base de* F.
3. *En déduire la dimension de* F.

Application 2.4. *Démontrer que* $\mathbb{R}_2[X] = Vect(\{X^2 + X - 1, 2X, X^2 + 1\})$.

2.2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Proposition 2.5. ***Formule de Grassman.***
Soient F *et* G *deux-sous espaces vectoriel d'un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel* E *de dimension finie. Alors :*

- $F + G$ *et* $F \cap G$ *sont de dimension finie ;*
- $dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$

Application 2.6. *Soient dans* $\mathbb{R}^4$ *:*

$$\overrightarrow{u}_1 = (0, 1, -2, 1), \overrightarrow{u}_2 = (1, 0, 2, -1), \overrightarrow{u}_3 = (3, 2, 2, -1), \overrightarrow{u}_4 = (0, 0, 1, 0) \text{ et } \overrightarrow{u}_5 = (0, 0, 0, 1)$$

On remarquera que l'on a la relation $\overrightarrow{u}_3 = 2\overrightarrow{u}_1 + 3\overrightarrow{u}_2$.
On pose $F = vect(\{\overrightarrow{u}_4, \overrightarrow{u}_5\})$ *et* $G = vect(\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3\})$.

1. *Déterminer la dimension de* G.
2. *Démontrer que la somme* $F + G$ *est directe.*
3. F *et* G *sont-ils supplémentaires dans* $\mathbb{R}^4$ *?*

Proposition 2.7. *Soient F et G deux-sous espaces vectoriel d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E de dimension finie. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $E = F \oplus G$
2. $dim(E) = dim(F) + dim(G)$ *et* $F \cap G = \left\{\overrightarrow{O}\right\}$
3. $dim(E) = dim(F) + dim(G)$ *et* $E = F + G$

Application 2.8. *Soient les sous-espaces suivants de $\mathbb{R}^3$:*

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + 2z = 0\right\} \text{ et } G = Vect((1, 1, 1))$$

Démontrer que F et G sont supplémentaires.

Proposition 2.9. ***Existence d'un supplémentaire.***
Soit un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E de dimension finie. Alors tout sous-espace vectoriel F de E admet un sous-espace vectoriel supplémentaire G. De plus :

$$dim(G) = dim(E) - dim(F)$$

Remarque 2.10. *Ce supplémentaire existe mais n'est pas unique.*
Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, le sous-espace vectoriel $F = Vect((1, 0))$ admet comme supplémentaire $G = vect((0, 1))$ mais aussi $H = vect((1, 1))$.

3 Rang d'une famille fini de vecteurs

Définition 3.1. *On appelle **rang** d'une famille de vecteurs la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille.*
Dans l'espace vectoriel E, le rang de la famille $\mathscr{F} = \{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p\}$ est :

$$rg(\mathscr{F}) = dim(Vect(\{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p\}))$$

Remarque 3.2. *Le rang d'une famille de vecteurs est le cardinal de la plus grande sous-famille libre que l'on peut en extraire.*

$$rg(\mathscr{F}) = dim(Vect(\{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p\})) \leq p$$

Théorème 3.3. *Soit* $\mathscr{F} = \{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p\}$ *une famille de* p *vecteurs d'un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel* E*. Alors :*

- $rg(\mathscr{F}) = p \Leftrightarrow \mathscr{F}$ *est libre*
- *Si* E *est de dimension finie, alors :*

$$rg(\mathscr{F}) = dim(E) \Leftrightarrow E = vect(\mathscr{F})$$

Définition 3.4. *Soit* $\mathscr{F} = \{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p\}$ *une famille de* p *vecteurs d'un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel* E *de dimension* n*. Soit* $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ *une base de* E*.*
On appelle ***matrice de la famille*** $\mathscr{F}$ *dans la base* $\mathscr{B}$*, la matrice* $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *dont les colonnes sont les vecteurs colonnes* $C_1, ..., C_p$ *associées à* $\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p$*.*
On note alors $\boldsymbol{A = Mat_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p)}$*.*

Remarque 3.5. *Si pour tout* $j \in [\![1, p]\!]$, $\overrightarrow{u}_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}\overrightarrow{e}_i$ *alors* $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$.

Théorème 3.6. *Soit* $\mathscr{F} = \{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p\}$ *une famille de* p *vecteurs d'un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel* E *de dimension* n*. Soit* $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ *une base de* E*.*
Alors le rang de la famille $\mathscr{F}$ *est égal au rang du système linéaire de matrice* A*.*

Méthode 3.7. *Pour déterminer le rang d'une famille finie de vecteurs en dimension finie :*

1. *On échelonne la matrice* $A = Mat_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ *à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss.*
2. *Le nombre de pivots de la matrice échelonnée équivalente en lignes à* A *est donc égal au rang de la famille* $\mathscr{F}$*.*

Application 3.8. *On se place dans* $\mathbb{R}_3[X]$*. Quel est le rang de la famille* $\mathscr{F} = \{P_1, ..., P_4\}$ *où :*

$$P_1 = 1 + 2X + X^2 - X^3, P_2 = 2 - 3X - X^2 + X^3, P_3 = 1 + X + 2X^3, P_4 = 2 + 9X + 3X^2 + X^3 \text{ ?}$$